Ein Randverteilungsproblem und seine Anwendung auf das asymptotische Spektrum bilinearer Abbildungen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
des Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
an der Universität Konstanz
Fakultät für Mathematik und Informatik

vorgelegt von

Franz Mauch

Referenten: Prof. Dr. V. Strassen
Prof. Dr. W. Baur

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Januar 1998

Abstract

In dieser Arbeit wird eine innere Abschätzung des asymptotischen Spektrums (im Sinne von [12]) der Menge aller Algebren $k[T]/(F)$ gewonnen. Damit verfügt man über notwendige (und möglicherweise hinreichende) Bedingungen für die asymptotische Degeneration von direkten Summen von Tensorprodukten solcher Algebren. Der Schlüssel zur Anwendung einer in [13] entwickelten Methode auf die vorliegende Situation ist die Lösung eines Randverteilungsproblems (in Abschnitt 2.1), das auch eigenständiges Interesse verdient.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Strassen für die sehr gute Betreuung und seine Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung der Ergebnisse

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bilden die bilinearen Abbildungen $f : U \times V \to W$, wo U, V und W endlich dimensionale Vektorräume über einem fest gewählten algebraisch abgeschlossenen Körper k sind. Besonderes Augenmerk erhalten hierbei die Multiplikationsabbildungen in Algebren. Hier wiederum bilden die Matrixalgebren die Brücke zur Komplexitätstheorie und zur Untersuchung des Exponenten der Matrixmultiplikation. Im Zentrum stehen die Begriffe der Degeneration und der asymptotischen Degeneration von bilinearen Abbildungen, die wesentlich durch diesen Exponenten motiviert sind. Wie in Strassen [12] gezeigt wird, hat die asymptotische Degeneration die Eigenschaft, auf den durch Äquivalenzklassen interessierender bilinearer Abbildungen vermöge $\oplus$ und $\otimes$ erzeugten Ring übertragen werden zu können. Dies liefert dann die Möglichkeit, die Strukturtheorie von Stone, Kadison und Dubois ([1]) anzuwenden und das asymptotische Spektrum dieser Abbildungen einzuführen.

Die Kenntnis solcher asymptotischer Spektren würde viele Probleme lösen, insbesondere könnte der Exponent der Matrixmultiplikation auf diese Weise bestimmt werden. In [13] hat Strassen das asymptotische Spektrum einer einzelnen Algebra des Typs $k[T]/(F)$, $0 \neq F \in k[T]$ berechnet. Die dahinter liegende Methode zur Angabe einer inneren Abschätzung des asymptotischen Spektrums durch das sogenannte Trägersimplex wird in dieser Arbeit angewandt, um eine innere Abschätzung des asymptotischen Spektrums mehrerer reduzierter Polynomalgebren zu gewinnen.

Dies führt auf ein Randverteilungsproblem bei 3–partiten 3–Hypergraphen, das mit einem Satz von größerer Allgemeinheit, als hier gefordert, gelöst werden kann. Der Beweis ist allerdings etwas verwickelt. Dieser Satz läßt sich in kanonischer Weise auf den Fall s–partiter s–Hypergraphen verallgemeinern und wird hier in dieser Darstellung bewiesen. Eine mögliche Anwendung ist die Verallgemeinerung des Konzeptes des Trägersimplexes auf $(s-1)$–lineare Abbildungen, z.B. die Multiplikation von $s-1$ Elementen einer Algebra.

Zur Organisation der vorliegenden Arbeit: Im ersten Kapitel werden die wesentlichen Begriffe wie Restriktion, Degeneration, asymptotische Restriktion, asymptotische Degeneration und asymptotisches Spektrum eingeführt, es ist eine für unsere Zwecke zugeschnittene Zusammenfassung der Arbeiten [12] und [13], es folgen gewisse Definitionen für Hypergraphen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf diesen, die die Sprache der folgenden Abschnitte vereinfachen, schließlich wird das Trägersimplex eingeführt und im Fall mehrerer reduzierter Polynomalgebren berechnet. Diese Berechnung teilt sich in einen allgemeinen Teil, der sich an die Vorlage anlehnt, und einen speziellen Teil. Das dabei auftauchende Randverteilungsproblem werden wir im zweiten Kapitel lösen.

Außerdem werden im zweiten Kapitel mit dem Randverteilungsproblem, nicht aber mit dem asymptotischen Spektrum direkt zusammenhängende kleinere Probleme besprochen, nämlich im wesentlichen Abschätzungen für die Facettenanzahl bestimmter Randverteilungspolytope. Dabei handelt es sich zum einen um das zum oben erwähnten Randverteilungsproblem gehörige Polytop, zum anderen um Randverteilungspolytope, die durch Partialordnungen erzeugt werden. Hier zeigen wir einen Zusammenhang zwischen Facetten und Ordnungsidealen auf, mittels dessen wir auch ein Beispiel für eine Folge von Paaren von Polytopen mit einer jeweils in der Dimension des Polytops linearen Facettenanzahl erhalten werden, deren Tensorprodukte eine Anzahl von Facetten besitzen, die schneller als polynomial wächst.

Bezeichnungen

a, b	Äquivalenzklassen bilinearer Abbildungen	
f	bilineare Abbildung	
h	spezielle Linearform in R	21
H	Hyperebene in R durch h definiert	21
$H_{\underline{\theta}}(p)$	$\underline{\theta}$–Entropie von p	8
$H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$	$\underline{\theta}$–Entropie von Γ	8
k	algebraisch abgeschlossener Körper	
keg	konvexe Hülle	
lin	lineare Hülle	
$M, M(\Gamma)$	Menge der Randverteilungstupel von Γ	10,20
$\mathbb{N}$	$\{0,1,2,\ldots\}$	
$\mathbb{N}'$	$\{1,2,,3,\ldots\}$	
P	Wahrscheinlichkeitssimplex von Γ	8
r_m, r_{k_1,k_2}	Rechtecksverteilungen	22,27
$\underline{r}_m$	Rechtecksverteilungstupel	22
R	Menge der Verteilungstupel	10,20
$R^{>}$	Menge der monotonen Verteilungstupel	21
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	
s	Stufenzahl von Γ	4
U, V, W	Vektorräume über k	
X_σ	σ–te Koordinatenmenge von Γ	4
Γ, Γ'	s–partite s–Hypergraphen	4
ζ	Trägersimplex	9
$[\![\underline{n}]\!], [\![n, m]\!], [\![n]\!]$	Hänge	5
$[t_1, t_2], (t_1, t_2)$	geschlossene und offene Intervalle von $\mathbb{R}$	

1 Innere Abschätzung der asympotischen Spektren der reduzierten Polynomalgebren: das Trägersimplex

1.1 Einführung

In den Arbeiten [12] und [13] entwickelte Strassen Konzepte zur Untersuchung der bilinearen Komplexität, die die Untersuchungen im Hinblick auf den Exponenten der Matrixmultiplikation erweiterten und diesbezüglich auch neue Resultate lieferten. Wir geben eine Zusammenfassung der für die vorliegende Arbeit wichtigen Konzepte. Für die Beweise der Behauptungen sei auf die obigen Arbeiten verwiesen.

Sei k ein Körper und sei **mod** k die Kategorie der endlich–dimensionalen k–Vektorräume. Die k–bilinearen Abbildungen $f : U \times V \to W$, genauer (U, V, W, f), wo $U, V, W \in$ **mod** k, bilden eine Kategorie, genannt **bil** k, wobei die Morphismen in natürlicher Weise definiert sind: Ein Morphismus von (U, V, W, f) nach (U', V', W', f') ist ein Tripel (α, β, γ), wo $\alpha : U \to U'$, $\beta : V \to V'$, $\gamma : W \to W'$ lineare Abbildungen sind mit $\gamma f(u, v) = f(\alpha u, \beta v)$. Sind (U, V, W, f), (U', V', W', f') isomorph (bezüglich des kategoriellen Isomorphiebegriffs), so notieren wir $(U, V, W, f) \simeq (U', V', W', f')$. Weiterhin schreiben wir häufig kurz f statt (U, V, W, f).

Besonderes Interesse genießen die Multiplikationsabbildungen in assoziativen Algebren mit Eins. Obwohl diese keine volle Unterkategorie von **bil** k bilden, zeigt sich, daß Algebren genau dann isomorph sind, wenn ihre Multiplikationsabbildungen isomorph sind.

Dies liefert uns sogleich einige Beispiele, indem wir einige einfache Algebren betrachten, und zwar k^n mit der komponentenweisen Multiplikation, die Matrizenalgebren $k^{n \times n}$ und reduzierte Polynomalgebren $k[T]/(F)$, wo $F \in k[T]$.

Bei der Matrixmultiplikation können wir allgemeiner die Multiplikation von Matrizen in $k^{e \times h}$ mit Matrizen in $k^{h \times l}$ betrachten. Wir bezeichnen diese bilineare Abbildung nach einem Vorschlag von Schönhage [11] mit $\langle e, h, l \rangle$. Die Multiplikationsabbildung in k^n bezeichnen wir mit $\langle n \rangle$ und die Multiplikationsabbildung in $k[T]/(F)$ mit $[\![F]\!]$.

Ausgehend von $f_i : U_i \times V_i \to W_i$, $i = 1, 2$ können wir deren direkte Summe $f_1 \oplus f_2 : (U_1 \oplus U_2) \times (V_1 \oplus V_2) \to W_1 \oplus W_2$ durch $(f_1 \oplus f_2)(u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2) := f_1(u_1, v_1) \oplus f_2(u_2, v_2)$ definieren.

Ein neutrales Element bezüglich $\oplus$ ist die (eindeutig definierte) Abbildung $\{0\} \times \{0\} \to \{0\}$.

Ferner können wir das Tensorprodukt $f_1 \otimes f_2 : (U_1 \otimes U_2) \times (V_1 \otimes V_2) \to W_1 \otimes W_2$ durch $(f_1 \otimes f_2)(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) := f_1(u_1, v_1) \otimes f_2(u_2, v_2)$ festlegen.

Auf Isomorphieklassen sind $\oplus$ und $\otimes$ kommutativ und $\otimes$ verhalten sich distributiv bezüglich $\oplus$. Weiterhin haben wir ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation, nämlich $\langle 1\rangle = \langle 1,1,1\rangle$, was der Multiplikation in k entspricht. Wir können sagen, daß die Isomorphieklassen einen kommuativen Semiring mit 1 bezüglich $\oplus$ und $\otimes$ bilden.

Die Nullabbildung (also die bilineare Abbildung, die überall 0 liefert) bezüglich U, V, W bezeichnen wir mit $(U, V, W, 0)$ oder kürzer — falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind — mit 0.

Als nächstes definieren wir den Begriff Restriktion. Wir bezeichnen (U, V, W, f) als Restriktion von (U', V', W', f'), kurz $f \le f'$, falls lineare Abbildungen $\alpha : U \to U'$, $\beta : V \to V'$, $\gamma : W' \to W$ existieren, so daß $f(u, v) = \gamma f'(\alpha u, \beta v)$. Die Restriktion ist eine Präordnung und liefert damit einen Äquivalenzbegriff, bezeichnet mit $\sim$, dabei wird $\le$ zu einer Partialordnung auf den Äquivalenzklassen. Eine andere, aber äquivalente Definition von $f \sim f'$ ist die Existenz von Nullabbildungen $0, 0'$, so daß $f \oplus 0 \simeq f' \oplus 0'$. Wir können also die unterliegenden Räume einer bilinearen Abbildung ändern, ohne die Äquivalenzklasse zu wechseln. Auch die Äquivalenzklassen bilden bezüglich $\oplus$ und $\otimes$ einen kommutativen Semiring mit 1.

Der Rang einer bilinearen Abbildung $R(f)$ ist definiert duch $R(f) := \min\{n : f \le \langle n\rangle\}$. Jede bilineare Abbildung kann unter Verwendung von $R(f)$ Multiplikationen berechnet werden. Die Umkehrung gilt zwar nicht, jedoch benötigt man mindestens $R(f)/2$ nichtskalare Multiplikationen zur Berechnung von f. Der Vorteil der Verwendung von R gegenüber anderen Berechnungsmodellen liegt unter anderem darin, daß $R(f^{\otimes N}) \le R(f)^N$. Besonders interessant ist $R(\langle n, n, n\rangle)$. Strassens Abschätzung $R(\langle 2, 2, 2\rangle) \le 7$ liefert $R(\langle n, n, n\rangle) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2,81})$. Nun folgt daraus nicht nur, daß der Aufwand an Multiplikationen für die Multiplikation von $n \times n$–Matrizen $O(n^{2,81})$ beträgt, sondern auch, daß diese Abschätzung sogar für den Aufwand an allen arithmetischen Operationen gilt. Deshalb ist der *Matrixexponent*

$$\omega := \inf\{\tau : R(\langle n, n, n\rangle) = O(n^\tau)\}$$

ein gutes Maß für den asymptotischen Aufwand zur Multiplikation von Matrizen. Näheres zu diesem Gebiet findet sich in Bürgisser et al. [7].

Eine schwächere (größere) Präordnung ist $\trianglelefteq$: Wir fixieren zunächst die Vektorräume U, V, W, betrachten also nur Elemente des Vektorraums $\mathrm{Bil}(U, V; W)$. Die Gruppe $G := \mathrm{Gl}(U) \times \mathrm{Gl}(V) \times \mathrm{Gl}(W)$ wirkt auf $\mathrm{Bil}(U, V; W)$ vermöge der Wirkung $((\alpha, \beta, \gamma)(f))(u, v) := \gamma f(\alpha^{-1}u, \beta^{-1}v)$. Für $f, f' \in \mathrm{Bil}(U, V; W)$ sagen wir, daß f' zu f degeneriert (in Zeichen $f \trianglelefteq f'$), falls $f \in \overline{Gf'}$, d.h. f im Abschluß (bzgl. der Zariskitopologie in $\mathrm{Bil}(U, V; W) \simeq U^* \otimes V^* \otimes W$) der Bahn von f' unter der Wirkung von G liegt. Übertragen wir $\trianglelefteq$ auf Äquivalenzklassen, so zeigt sich der Vorteil des Äquivalenzbegriffs zum Isomorphiebegriff, denn der erstere erlaubt es, die unterliegenden Räume von f und f' aneinander anzupassen.

Analog zum Rang definieren wir nun den Grenzrang $\underline{R}(f) := \min\{n : f \trianglelefteq \langle n\rangle\}$. Da $\trianglelefteq$ schwächer ist als $\leq$, kann man kleinere Werte für $\underline{R}(f)$ erwarten. Andererseits ist z.B. bei der Berechnung des Matrixexponenten $\underline{R}$ so „gut" wie R, was zu besseren Abschätzungen für den Matrixexponenten führen kann.

Da bei der Definition des Matrixexponenten das asymptotische Verhalten von R betrachtet wird, ist es vielleicht naheliegend, die Asymptotik in eine weitere Präordnung einzubringen. Wir definieren $f \lesssim g :\Longleftrightarrow f^{\otimes N} \leq g^{\otimes N+o(N)}$, die offensichtlich eine schwächere Präordung als $\leq$ liefert. Ein interessanter Aspekt ist, daß bei Ersetzen von $\leq$ durch $\trianglelefteq$ in der Definition von $\lesssim$ nichts Neues herauskommt, ein Indiz dafür, daß diese Definition einen gehaltvollen Begriff einführt.

Wichtiger ist allerdings, daß $\lesssim$ auf den universellen Ring $\mathcal{B}$ über dem Semiring der Äquivalenzklassen bilinearer Abbildungen mit den Operationen $\oplus$ und $\otimes$ übertragbar ist. Dem liegt die Eigenschaft $a + c \lesssim b + c \Leftrightarrow a \lesssim b$ von $\lesssim$ zugrunde. Dies hat zusammen mit den anderen Eigenschaften von $\lesssim$ zur Folge, daß die Strukturtheorie von Stone,Kadison und Dubois (s. [1]) eingebracht werden kann.

Die Menge $\Delta(\mathcal{B})$ der Ringhomomorphismen von $\mathcal{B}$ nach $\mathbb{R}$, die bezüglich $\lesssim$ monoton sind, wird als asymptotisches Spektrum bezeichnet. Vermöge der Auswertungsfunktionen $\hat{a} : \Delta(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$, $\xi \to \xi(a)$ erhält $\Delta(\mathcal{B})$ eine Topologie, durch die $\Delta(\mathcal{B})$ zu einem kompakten Hausdorff–Raum wird. Die Abbildung $\varphi : \mathcal{B} \to C(\Delta(\mathcal{B}))$, $a \mapsto \hat{a}$ ist ein Ringhomomorphismus, der die Elemente von $\Delta(\mathcal{B})$ trennt. Der entscheidende Punkt ist die Tatsache, daß φ die volle Information über $\lesssim$ enthält, denn es gilt $a \lesssim b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$. Würden wir also das asymptotische Spektrum gut genug kennen, würde sich die Frage $a \lesssim b$ effizient entscheiden lassen.

Natürlich wird man zunächst versuchen, nicht ganz $\mathcal{B}$ zu betrachten, sondern z.B. nur den von einer Menge Y von bilinearen Abbildungen resp. deren Äquivalenzklassen erzeugten Unterring $\mathbb{Z}[Y] \subset \mathcal{B}$. Hierzu können wir in entsprechender Weise ein asymptotisches Spektrum definieren, wir bezeichnen es mit $\Delta(Y)$ (asymptotisches Spektrum von Y). Es gilt für $a, b \in \mathbb{Z}[Y]$ weiterhin $a \lesssim b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$, wobei $\varphi(a), \varphi(b)$ jetzt Funktionen auf $\Delta(Y)$ sind. Da Ringhomomorphismen von $\mathbb{Z}[Y]$ nach $\mathbb{R}$ durch die Werte an Elementen in Y festgelegt sind, kann das asymptotische Spektrum auch als Teilmenge von $\mathbb{R}^Y$ aufgefaßt werden.

In [12] wird das asymptotische Spektrum der halbeinfachen Algebren, die ja nach Wedderburn isomorph zu direkten Summen von Matrixalgebren sind und deshalb offensichtlich einen Semiring bezüglich $\oplus$ und $\otimes$ bilden, berechnet. Man erhält hier das Intervall $[2, 2^\omega]$, wo φ durch $\varphi(\langle n, n, n\rangle) := x^{\log_2 n}$ definiert ist. Würde man also das asymptotische Spektrum (zumindest das der halbeinfachen Algebren) kennen, wäre damit der Exponent der Matrixmultiplikation bestimmt.

Das Maximum von $\varphi(a)$ ist $\underset{\sim}{R}(a)$, wo $\underset{\sim}{R}(a) := \lim_{N\to\infty} R(a^{\otimes N})^{1/N} = \lim_{N\to\infty} \underline{R}(a^{\otimes N})^{1/N}$, also einer asymptotischen Variante von R resp. $\underline{R}$. Nun hat R in natürlicher Weise einen Gegenspieler, nämlich den Unterrang Q, wo $Q(a) := \max\{n : n \leq a\}$. Entsprechend zu $\underline{R}$ gibt es den Grenzunterrang $\underline{Q}(f) := \max\{n : n \trianglelefteq a\}$. Dazu gibt es wieder $\underset{\sim}{Q}(a) := \lim_{N\to\infty} Q(a^{\otimes N})^{1/N} = \lim_{N\to\infty} \underline{Q}(a^{\otimes N})^{1/N}$. Nun ist das Minimum von $\varphi(a)$ gerade $\underset{\sim}{Q}(a)$. Die Extremwerte von $\varphi(a)$ haben also eine leicht interpretierbare Bedeutung.

Da man das asymptotische Spektrum zu wenig kennt, liegt es nahe, wenigstens innere oder äußere Abschätzungen zu finden. Äußere Abschätzungen liefern hinreichende Bedingungen für $\lesssim$ und werden durch konkrete Restriktionen, Degenerationen oder asymptotische Degenerationen gewonnen. Innere Abschätzungen liefern notwendige Bedingungen für $\lesssim$ (und damit auch für $\leq$, $\trianglelefteq$). Eine solche innere Abschätzung wird in [13] für gewisse Klassen bilinearer Abbildungen entwickelt, nämlich ein singuläres Simplex des $\mathbb{R}^Y$, dessen Bild ganz in $\Delta(Y)$ liegt, das sogenannte Trägersimplex.

Um dieses zu definieren, benötigen wir zunächst die Koordinatendarstellung einer bilinearen Abbildung $f = (U, V, W, f)$: Sei $C = ((u_i)_{i\in I}, (v_j)_{j\in J}, (w_\ell)_{\ell\in L})$ ein Tripel von Basen von U, V bzw. W. Dann ist $f(u_i, v_j) =: \sum_\ell f_{ij\ell} w_\ell$. Wir definieren $\operatorname{supp}_C f := \{(i, j, \ell) : f_{i,j,\ell} \neq 0)\}$, den Träger von f bezüglich C. Nun ist $(I, J, L, \operatorname{supp}_C f)$ ein 3–partiter 3–Hypergraph. Wir sehen, daß 3–partite 3–Hypergraphen in natürlicher Weise hier auftauchen.

Bevor wir mit der Definition des Trägersimplexes fortfahren, führen wir einige Definitionen bezüglich s–partiten s–Hypergraphen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf diesen ein.

1.2 s–partite s–Hypergraphen

Sei $s \in \mathbb{N}'$. Unter *s–Hypergraphen* versteht man im allgemeinen (z.B. [2]) ein Paar (X, Γ), wo X endlich und nicht leer ist und $\Gamma \subset \binom{X}{s}$. Die Elemente von X bezeichnet man als Ecken und die Elemente von Γ als Kanten. Der Ausdruck *s–partit* bedeutet, daß es eine echte Partition von X in die „Koordinatenmengen“ $X_1, \ldots, X_s$ gibt, so daß die Kanten jede Koordinatenmenge in genau einem Punkt treffen, d.h. für alle $e \in \Gamma, \sigma \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $|e \cap X_\sigma| = 1$.

Eine Kante $e = \{x_1, \ldots, x_s\}$ in einem s–partiten s–Hypergraphen mit $x_\sigma \in X_\sigma$ können wir in eineindeutiger Weise als s–Tupel $(x_1, \ldots, x_s)$ schreiben. Dementsprechend können wir Γ auch als Teilmenge von $X_1 \times \ldots \times X_s$ auffassen. Diese Auffassungsweise erleichtert im weiteren die Darstellung und soll deswegen bevorzugt werden. Für uns ist also ein s–partiter s–Hypergraph ein $(s+1)$–Tupel $(X_1, \ldots, X_s, \Gamma)$ aus den Mengen $X_1, \ldots, X_s$ und $\Gamma \subset X_1 \times \ldots X_s$. Die Elemente von Γ bezeichnen wir dann häufig als $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_s)$, wie wir s–Tupel generell durch einen Unterstrich kennzeichnen wollen.

Diese Darstellung erlaubt es, die Forderung nach Disjunktheit der X_σ fallen zu lassen, was häufig einfachere Notationen zur Folge hat. Beim Übergang zur Darstellung der s–partiten s–Hypergraphen als Mengensysteme sind die X_σ zuerst disjunkt zu machen.

Wir werden im folgenden häufig Hypergraph statt s–partiter s–Hypergraph schreiben. Da wir nur solche betrachten werden, sollte dies keine Probleme bereiten. Außerdem werden wir meist den Hypergraphen $(X_1, \ldots, X_s, \Gamma)$ kurz mit Γ bezeichnen. Häufig verwenden wir auch $\Gamma' = (X_1', \ldots, X_s', \Gamma')$.

Mit $\Gamma \subset \Gamma'$ fordern wir neben der Teilmengenrelation für die Mengen Γ und Γ' auch gleichzeitig $X_\sigma = X_\sigma'$.

Im Fall von $s = 1$ ist Γ einfach eine Teilmenge von X. Der Fall von $s = 2$ liefert den gewöhnlichen Begriff des bipartiten Graphen.

Eine *Einbettung* von Γ in Γ' ist ein s–Tupel $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ von Abbildungen, wo $\varphi_\sigma : X_\sigma \to X_\sigma'$ injektiv und $\underline{\varphi}(\underline{x}) := (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_s(x_s)) \in \Gamma' \Leftrightarrow \underline{x} \in \Gamma$.

Existiert eine Einbettung von Γ in Γ', so schreiben wir häufig kurz $\Gamma \leq \Gamma'$.

Im Fall von $s = 1$ ist der Begriff der Einbettung natürlich äquivalent mit der Mengeneinbettung; für $s = 2$ bedeutet $\Gamma \leq \Gamma'$, daß Γ induzierter Teilgraph von Γ' ist.

Da die Verkettung von Einbettungen wieder Einbettungen liefert und die identischen Abbildungen auch Einbettungen sind, bilden die s–partiten s–Hypergraphen mit den Einbettungen als Morphismen in natürlicher Weise eine Kategorie mit dem folgenden zugehörigen Isomorphiebegriff:

Ein *Isomorphismus* φ von Γ auf Γ' ist eine Einbettung mit $\underline{\varphi}$ bijektiv ($\forall \sigma : \varphi_\sigma$ bijektiv). In diesem Fall sagen wir Γ ist zu Γ' *isomorph*, in Zeichen $\Gamma \simeq \Gamma'$.

Die Projektionen von $X_1 \times \ldots \times X_s$ auf X_σ bezeichnen wir mit π_σ. Γ heißt *aufspannend*, wenn für alle σ gilt $\pi_\sigma(\Gamma) = X_\sigma$.

Es ist klar, daß die Elemente von $X_\sigma \setminus \pi_\sigma(\Gamma)$ nicht allzu interessant sind. Nun ist $\Gamma_s := (\pi_1(\Gamma), \ldots, \pi_s(\Gamma), \Gamma)$ ein aufspannender s–partiter s–Hypergraph, und die Mengen–Einbettungen $\pi_\sigma(\Gamma) \subset X_\sigma$ liefern eine Einbettung $\Gamma_s \leq \Gamma$. Offensichtlich ist Γ_s bis auf Isomorphie der einzige aufspannende Hypergraph, der in Γ eingebettet werden kann. Wir nennen ihn den zu Γ gehörigen aufspannenden Hypergraphen.

Γ heißt äquivalent zu Γ' ($\Gamma \sim \Gamma'$), wenn ihre zugehörigen aufspannenden Hypergraphen isomorph sind.

Beispiele für s–partite Hypergraphen sind Diagonalen: Sei X eine endliche Menge und $\Gamma := \{(x, \ldots, x) : x \in X\}$. Dann bezeichnen wir $(X, \ldots, X, \Gamma)$ (und dazu isomorphe Hypergraphen) als *Diagonale*.

Im Rückblick auf den vorigen Abschnitt ist der Träger der komponentenweisen Multiplikation in k^n bezüglich der natürlichen Basis des k^n offensichtlich eine Diagonale.

Ein für uns sehr wichtiger Typ von Hypergraph ist der *Hang*: Zu $\underline{n} \in \mathbb{N}'^s, m \in \mathbb{N}'$ definieren wir $X_\sigma := \{0, \ldots, n_\sigma - 1\}$, $\Gamma := \{(x_1, \ldots, x_s) \in X_1 \times \ldots \times X_s :$

$\sum_\sigma x_\sigma = m-1\}$ und bezeichnen $(X_1, \ldots, X_s, \Gamma)$ als Hang $[\![\underline{n}, m]\!]$. Weiter definieren wir für $n \in \mathbb{N}' : [\![n, m]\!] := [\![(n, \ldots, n), m]\!]$ und $[\![n]\!] := [\![n, n]\!]$ (wobei wir s als gegeben annehmen).

Die Wahl des Namens stammt aus der Visualisierung von Γ im Falle $s = 3$. Im Falle von $s = 2$ ist der Hang $[\![n]\!]$ gleichzeitig eine Diagonale.

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist im Fall $s = 3$ der Hang $[\![n]\!]$ der Träger der reduzierten Polynommultiplikation $f_n := [\![T^n]\!]$ bezüglich der natürlichen Basis. $[\![\underline{n}, m]\!]$ entspricht zwar i.a. nicht mehr dem Träger einer Algebrenmultiplikation, ist aber dennoch Träger einer gewissen bilinearen Abbildung. Da unsere Betrachtung dadurch nicht wesentlich komplizierter wird, wollen wir die Berechnung des „Trägersimplexes“ solcher Abbildungen durchführen, die natürlich auch den Fall der reduzierten Polynommultiplikation $f_n = [\![T^n]\!]$ einschließt.

Es folgen nun einige Bemerkungen zu Hängen, insbesondere werden wir eine Charakterisierung aufspannender Hänge geben, die wir später benötigen werden.

Es läßt sich $[\![n]\!]$ in $[\![n+1]\!]$ einbetten:

Lemma 1.1 *Für alle $n \geq 1$ gilt: $[\![n]\!] \leq [\![n+1]\!]$.*

Beweis: Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ die natürlichen Einbettungen von $\{0, \ldots, n-1\}$ in $\{0, \ldots, n\}$ und $\varphi_s(x_s) := x_s + 1$. Offensichtlich ist $[\![n]\!] \leq [\![n+1]\!]$ vermöge $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$. $\square$

Wann ist $[\![\underline{n}, m]\!]$ aufspannend? Da $\pi_\sigma([\![\underline{n}, m]\!]) \subset \{0, \ldots, m-1\}$, muß zumindest für alle σ gelten, daß $n_\sigma \leq m$. Damit können wir aufspannende $[\![\underline{n}, m]\!]$ in $[\![m]\!]$ einbetten, wobei die Einbettungsabbildungen φ_σ die natürlichen Einbettungen von $X_\sigma = \{0, \ldots, n_\sigma - 1\} \subset \{0, \ldots, m\}$ sind.

Gewisse Eigenschaften von $[\![\underline{n}, m]\!]$ lassen sich damit an dem einfacher strukturierten Hang $[\![n]\!]$ studieren.

Das folgende Lemma beantwortet nun die obige Frage.

Lemma 1.2 *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Aufgespanntheit von $[\![\underline{n}, m]\!]$ ist, daß $\forall \sigma$: $n_\sigma \leq m$ und $\sum_{\sigma' \neq \sigma}(n_{\sigma'} - 1) \geq m - 1$.*

Der zu einem Hang gehörige aufspannende Hypergraph ist wieder ein Hang.

Beweis: Aus $n_\sigma - 1 \in \pi_\sigma(\Gamma)$ folgt $n_\sigma \leq m$. Aus $0 \in \pi_\sigma(\Gamma)$ folgt $\sum_{\sigma' \neq \sigma}(n_\sigma - 1) \geq m - 1$. Es ist klar, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Die zweite Behauptung folgt über Induktion nach $\sum_\sigma n_\sigma$. Sei $[\![n, m]\!]$ nicht aufspannend, dann existiert ein σ mit $\pi_\sigma(\Gamma) \neq \{0, \ldots, n_\sigma - 1\}$. O.E. können wir annehmen, daß $\sigma = 1$. Ist $n_1 - 1 \notin \pi_1(\Gamma)$, dann ist sicherlich $[\![(n_1, n_2, \ldots, n_s), m]\!] \sim$

$[\![(n_1-1, n_2, \ldots, n_s), m]\!]$, und letzterer ist nach Induktionsvoraussetzung äquivalent einem aufspannenden Hang.

Ist $0 \notin \pi_1(\Gamma)$, so ist sicherlich $\Gamma_1 := [\![(n_1, n_2, \ldots, n_s), m]\!] \sim [\![(n_1-1, n_2, \ldots, n_s), m-1]\!] =: \Gamma_2$ ($(\mathrm{id}\,|_{\pi_1(\Gamma_2)}+1, \mathrm{id}\,|_{\pi_2(\Gamma_2)}, \ldots, \mathrm{id}\,|_{\pi_s(\Gamma_2)})$ ist eine Einbettung von Γ_2 in Γ_1.)

Also können wir nun annehmen, daß $0, n_1-1 \in \pi_1(\Gamma)$. Daraus folgt, daß $\sum_{\sigma>1} n_\sigma \geq m-1$ und $n_1 - 1 \leq m-1$. Für alle $x_1 \in \{1, \ldots, n_1-2\}$ wählen wir $x_2 \leq n_2 - 1, \ldots, x_s \leq n_s - 1$, so daß $\sum_{\sigma>1} x_\sigma = m-1-i$, dann ist $(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in [\![\underline{n}, m]\!]$, also $x_1 \in \pi_1(\Gamma)$ im Widerspruch zur Annahme. □

Weiter gilt

Lemma 1.3 *Es ist* $[\![\underline{n}, m]\!] \simeq [\![\underline{n}, \sum_\sigma (n_\sigma - 1) - (m-1) + 1]\!]$.

Beweis: Dies ist klar mittels dem Isomorphismus $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$, wo $\varphi_\sigma(i) = n_\sigma - 1 - i$. □

Ein hier wesentlicher Begriff ist die Straffheit.

Definition 1.4 *Wir bezeichnen* Γ *als* straff*, falls es ein* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ *gibt mit* $a_\sigma : X_\sigma \mapsto \mathbb{Z}$ *injektiv, so daß*

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad \sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma) = 0.$$

Wichtig ist, daß der Hang straff ist.

Lemma 1.5 $[\![\underline{n}, m]\!]$ *ist straff.*

Beweis: Wir definieren $\underline{a}$ vermöge $a_\sigma(x_\sigma) := s x_\sigma - (m-1)$. Somit ist a_σ injektiv. Für $\underline{x} \in \Gamma$ ist $\sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma) = \sum_\sigma (s x_\sigma - (m-1)) = s(m-1) - s(m-1) = 0$. Also ist $[\![\underline{n}, m]\!]$ straff. □

1.3 Randverteilungen und Entropien

Zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p : \Gamma \to [0,1]$ auf Γ bezeichnen wir die σ–te Randverteilung als $p^{(\sigma)}$, d.h.

$$p^{(\sigma)}(x_\sigma) := \sum_{\underline{y} \in \pi_\sigma^{-1}(x_\sigma)} p(\underline{y}).$$

Das s–Tupel $(p^{(1)}, \ldots, p^{(s)})$ von Verteilungen auf den X_σ bezeichnen wir als Randverteilungstupel $p^{(\cdot)}$.

Ist p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer endlichen Menge X, so bezeichnen wir mit $H(p)$ die Entropie von p, d.h.

$$H(p) := -\sum_{x \in X : p(x) > 0} p(x) \log_2(p(x)).$$

Die Entropie ist eine stetige konkave Funktion auf dem Wahrscheinlichkeitssimplex von X.

Für uns wird nicht die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf Γ interessant sein, sondern die Entropien der Randverteilungen, genauer, gewichtete Summen derselben.

Hierzu sei $\Theta := \{\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in [0,1]^s : \sum_\sigma \theta_\sigma = 1\}$ das Standard–$(s-1)$–Simplex (im Sinne der algebraischen Topologie) und $\Theta_0 := \Theta \cap (0,1)^s$.

Sei $\underline{\theta} \in \Theta$ und $\underline{p} \in R$ ein Verteilungstupel. Wir definieren

$$H_{\underline{\theta}}(\Gamma, \underline{p}) := \sum_\sigma \theta_\sigma H(p_\sigma).$$

Sei weiter p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf Γ. Wir nennen

$$H_{\underline{\theta}}(p) := H_{\underline{\theta}}(\Gamma, p^{(\cdot)})$$

die $\underline{\theta}$–Entropie von p.

Da die Menge P aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Γ ein Polytop, insbesondere eine kompakte Menge und aufgrund der entsprechenden Eigenschaft der Entropie auch $H_{\underline{\theta}}$ stetig auf P ist, können wir das Maximum von $H_{\underline{\theta}}$ bilden. Wir definieren

$$H_{\underline{\theta}}(\Gamma) := \max_{p \in P} H_{\underline{\theta}}(p)$$

und bezeichnen es als $\underline{\theta}$–Entropie von Γ.

Es ist klar, daß die $\underline{\theta}$–Entropie von Γ invariant unter Isomorphien ist. Da weiterhin die Randverteilungen auf $\pi_\sigma(\Gamma)$ konzentriert sind, hängt $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$ nur von der Äquivalenzklasse von Γ ab.

1.4 Das Trägersimplex

Nach dem kleinen Ausflug in den Bereich der Hypergraphen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen fahren wir fort mit der Definition des Trägersimplexes, wobei von nun an $s = 3$ sei. Das zugrunde liegende Verfahren, das zu einer inneren Abschätzung des asymptotischen Spektrums führt, läßt sich nur für bestimmte Klassen bilinearer Abbildungen durchführen:

Sei im folgenden Y eine Menge von Äquivalenzklassen bilinearer Abbildungen. Für alle $a \in Y$ existiere ein Repräsentant $f = (U, V, W, f)$ und ein Basentripel C_f, so daß $\mathrm{supp}_{C_f} f$ straff[1] ist. Wir nennen solche Abbildungen straff.

Das Trägersimplex wird ein bestimmtes singuläres 2–Simplex (im Sinne der algebraischen Topologie) des asymptotischen Spektrums sein, das heißt eine Funktion $\zeta : \Theta \to \Delta(Y)$, wo Θ das im vorigen Abschnitt definierte Standard–Simplex ist.

Faßt man $\Delta(Y)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^Y$ auf, so sind die Bildpunkte von ζ Funktionen auf Y; wir schreiben deshalb übersichtshalber $\underline{\theta}$ als *Index* an ζ. Wir haben also $\zeta_{\underline{\theta}}(a)$ für alle $a \in Y$ und $\underline{\theta} \in \Theta$ anzugeben.

Nun liefert uns [12], daß die durch $\zeta_{\underline{\theta}}([f]) := 2^{H_{\underline{\theta}}(\mathrm{supp}_{C_f} f)}$ definierte Funktion wohldefiniert ist (also weder von dem Repräsentanten noch von dem Basistupel abhängt (soweit $\mathrm{supp}_{C_f} f$ straff ist)) und ein singuläres Simplex des asymptotischen Spektrums $\Delta(Y)$ ist. Dieses Simplex bezeichnen wir als Trägersimplex.

Betrachten wir nun die Algebra $A := k[T]/(T^n)$, deren Multiplikationsabbildung wir mit f_n bezeichnet hatten. Sei nun C das Basistripel $(T^0, \ldots, T^{n-1})$, $(T^0, \ldots, T^{n-1})$,$(T^{n-1}, \ldots, T^0)$. Dann ist offensichtlich $\mathrm{supp}_C f_n = [\![n]\!]$ und straff.

Sind $n_1, n_2 \leq n, n_3 \leq m \leq n$ gegeben, so hat die Einschränkung von f_n auf die durch die Basis $(T^0, \ldots, T^{n_1-1})$ in der ersten Komponente, $(T^0, \ldots, T^{n_2-1})$ in der zweiten Komponente und $(T^{m-1}, \ldots, T^{m-n_3})$ in der dritten Komponente erzeugten Unterräume bezüglich dieser Basis als Träger den Hypergraphen $[\![\underline{n}, m]\!]$. Die Abbildung selbst bezeichnen wir mit $f_{\underline{n},m}$.

Wie in [12] gezeigt wird, reicht es für die Bestimmung des Spektrums (der Äquivalenzklasse) einer einzigen straffen bilinearen Abbildung aus, das Maximum und das Minimum von $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$ auf Θ zu kennen. Dies ermöglicht mittels der (nichttrivialen) Berechnung von $H_{(1/3,1/3,1/3)}([\![n]\!])$ das gesamte asymptotische Spektrum $\Delta([f_n])$ zu bestimmen. Diese Ergebnisse lassen sich direkt auch auf $f_{(n,n,n),m}$ übertragen, es ist nur $H_{(1/3,1/3,1/3)}([\![n, m]\!])$ zu bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun für beliebiges $\underline{\theta} \in \Theta$ $H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!])$ berechnet, so daß analog zur Vorlage $\Delta([f_{\underline{n},m}])$ berechnet werden kann. Auf diesen Punkt gehen wir aber nicht gesondert ein, da die Übertragung bis auf die Berechnung von $H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!])$ trivial ist.

Mit der Berechnung von $H_{(1/3,1/3,1/3)}([\![n]\!])$ läßt sich auch das asymptotische Spektrum einer direkten Summe reduzierter Polynommultiplikationen der Gestalt f_n berechnen. Dies liefert das Spektrum der Multiplikationsabbildung in $A := k[T]/(F)$. Die Übertragung auf $[\![\underline{n}, m]\!]$ liefert aber keine so leicht zu formulierenden Resultate.

[1] Es ist zwar möglich, das Trägersimplex für ein größere Klasse von Abbildungen zu definieren; da wir jedoch nur Trägersimplices von Abbildungen mit Basen betrachten werden, die straffe Hypergraphen als Träger gewähren, gehen wir hierauf nicht weiter ein.

Mit der in dieser Arbeit vorgenommen Bestimmung von $H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!])$ läßt sich das Trägersimplex des von den Multiplikationsalgebren mehrerer reduzierter Polynomalgebren erzeugten Semirings vollständig bestimmen. Bei Richtigkeit einer in [14] geäußerten Vermutung wäre damit das asymptotische Spektrum einer beliebigen Menge reduzierter Polynomalgebren berechnet. Ohne diese erhalten wir nur notwendige Bedingungen für asymptotische Degeneration und damit auch für Degeneration und Restriktion.

In [12] ist bemerkt, daß das Konzept des asymptotischen Spektrums und des Trägersimplexes auch auf den Fall $(s-1)$–linearer Abbildungen übertragen werden kann. Im Fall der Algebren entspricht dies der Multiplikation von $(s-1)$ Faktoren in der Algebra. Deshalb wird hier die Bestimmung von $H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!])$ allgemein für $s \geq 3$ durchgeführt. Im Falle eines von nur einer solchen Abbildung erzeugten Semirings läßt sich aber damit im Gegensatz zum Fall $s = 3$ noch nicht das asymptotische Spektrum bestimmen.

1.5 Ansatz zur Berechnung von $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$

Wir beschreiben hier einen Ansatz zur Berechnung von $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$, der für gewisse Γ erfolgreich ist, insbesondere für $\Gamma = [\![\underline{n}, m]\!]$. Die wesentlichen Ideen dieses Abschnitts stammen dabei aus [13]. Die konkrete Durchführung für $\Gamma = [\![\underline{n}, m]\!]$ wird dann im nächsten Abschnitt folgen.

Im folgenden werden wir aus notationellen Gründen Disjunktheit der X_σ annehmen. Wie man leicht einsieht, wäre diese Einschränkung durch einen erhöhten Notationsaufwand zu beseitigen, den wir hier aber vermeiden wollen. Weiterhin nehmen wir generell an, daß $\Gamma \neq \emptyset$.

Für einen Hypergraphen $\Gamma = (X_1, \ldots, X_s, \Gamma)$ sei V_σ der von X_σ frei erzeugte Vektorraum und $V_\Gamma = \bigoplus_\sigma V_\sigma$, wobei dies wegen der angenommenen Diskjunktheit der X_σ mit dem von $\bigcup_\sigma X_\sigma$ frei erzeugten Vektorraum (bis auf Isomorphie) übereinstimmt. Hierbei können wir $\underline{x} \in \Gamma$ mit $x_1 \oplus \ldots \oplus x_s \in V_\Gamma$ identifizieren. Unter dieser Identifikation sei $\operatorname{keg} \Gamma$ der von den $\underline{x} \in \Gamma$ in V_Γ erzeugte Kegel.

Weiter sei R_σ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf X_σ, die kanonisch mit Elementen in $\operatorname{aff} X_\sigma \subset V_\sigma$ identifiziert werden können. Weiter sei $R := \prod_\sigma R_\sigma \subset V_\Gamma$.

Die Menge $M := (\operatorname{keg} \Gamma) \cap R$ kann als Menge der Randverteilungstupel aufgefaßt werden:

Lemma 1.6 *Es existiert eine Bijektion zwischen M und der Menge der Randverteilungstupel.*

Beweis: Sei $v := \sum_{\underline{x}\in\Gamma} p(\underline{x})\underline{x} \in \operatorname{keg}\Gamma \cap R$, insbesondere ist $p(\underline{x}) \geq 0$. Nun ist

$$v = \sum_{\underline{x}\in\Gamma}\sum_{\sigma} p(\underline{x})x_\sigma = \sum_{\sigma}\sum_{y\in X_\sigma}\left(\sum_{\underline{x}\in\pi_\sigma^{-1}(y)} p(\underline{x})\right) y = \sum_{\sigma}\sum_{y\in X_\sigma} p^{(\sigma)}(y)y$$

Wegen $v \in V_\Gamma^p$ folgt $\forall\sigma : \sum_{y\in X_\sigma} p^{(\sigma)}(y) = 1$. Also ist p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Γ und $(p^{(\cdot)})$ ein s–Tupel von Randverteilungen.

Ist umgekehrt p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Γ, so gilt, daß $v{:=} \sum_{\underline{x}\in\Gamma} p(\underline{x})\underline{x}\in \operatorname{keg}\Gamma$, und mit obiger Rechnung ist $v = \sum_\sigma \sum_{y\in X_\sigma} p^{(\sigma)}(y)y$, also $v \in \prod_\sigma R_\sigma = R$.

Es ist klar, daß die beiden Zuordnungen zueinander invers sind. □

Aufgrund dieser Bijektion und der Abhängigkeit von $H_{\underline{\theta}}(p)$ nur von den Randverteilungen von p haben wir zur Berechnung von $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$ für $\underline{\theta} \in \Theta$ die Funktion $H_{\underline{\theta}}(\Gamma, \underline{p}) = \sum_\sigma \theta_\sigma H(p_\sigma)$ auf dem Polytop M zu maximieren.

Nun ist die Funktion $H_{\underline{\theta}}(\Gamma, \underline{p})$ offensichtlich konkav auf M (aufgrund der entsprechenden Eigenschaft der Entropie), sie ist sogar streng konkav auf M, falls $\underline{\theta} \in \Theta_0$. Weiter nimmt eine streng konkave und stetige (reellwertige) Funktion auf M ein eindeutig bestimmtes (lokales) Maximum an (da ein Polytop kompakt ist, gibt es mindestens ein Maximum, mehr als ein lokales Maximum kann es aber wegen der Konvexität von M und der strengen Konkavität der Funktion offensichtlich nicht geben). Das (eindeutig bestimmte) maximierende Randverteilungstupel wollen wir im folgenden $\underline{\hat{p}}$ nennen.

Wir geben hier eine kleine Heuristik zur Bestimmung des Maximums und der maximierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Hierbei übergehen wir die Tatsache, daß $H_{\underline{\theta}}(\Gamma, \underline{p})$ keine Funktion auf V ist, sondern nur auf auf R.

Die Bestimmung des Maximums einer streng konkaven Funktion auf einem Polytop M, wobei die Funktion auf der affinen Hülle von M definiert ist, kann im wesentlichen auf das Problem der Bestimmung der Seite, welche den Punkt, an dem das Maximum angenommen wird, als inneren Punkt enthält, zurückgeführt werden:

Die maximierende Randverteilung ist sicherlich irgendein relativ innerer Punkt einer (nicht unbedingt echten) Seite, (wie alle Punkte eines Polytops). Dann ist diese Randverteilung aber zugleich das Maximum nicht nur auf der Seite sondern auf der affinen Hülle der Seite. Kennen wir also diese Seite, so können wir die Bestimmung des Maximums auf eine unbeschränkte konvexe Optimierung zurückführen, die einfach zu bewältigen ist.

Im vorliegenden Fall raten wir, daß diese Seite M selbst sei. Wir bestimmen mittels unbeschränkter konvexer Optimierung auf aff M ein Maximum und prüfen, ob die maximierende Wahrscheinlichkeitsverteilung in M liegt. Ist dies der Fall, so haben wir offensichtlich auch das Maximum in M.

Wir wollen diese Vorgehensweise im folgenden durchführen, wobei wie erwähnt zu beachten ist, daß $H_{\underline{\theta}}(\Gamma, \underline{p})$ nur für $\underline{p} \geq 0$ definiert, also auch keine unbeschränkte Optimierung auf aff M möglich ist. Tatsächlich ist dies aber nicht besonders störend.

Wir beginnen mit einer Charakterisierung des maximierenden Verteilungstupels. Wir wollen dies für allgemeines Γ durchführen. Die erste Charakterisierung ist für alle $\theta \in \Theta$ gültig.

Definition 1.7 *Für ein Verteilungtupel $\underline{p} \in R$ und $\underline{\theta} \in \Theta$ definieren wir eine konvex–lineare (d.h. bezüglich Konvexkombinationen lineare) Funktion $h_{\underline{p},\underline{\theta}}$: $\mathrm{keg}(\bigcup_\sigma X_\sigma) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch*

$$h_{\underline{p},\underline{\theta}}(x_\sigma) := -\theta_\sigma \log_2 p_\sigma(x_\sigma).$$

Damit ist $h_{\underline{p},\underline{\theta}}(\underline{x}) = h_{\underline{p},\underline{\theta}}(x_1 \oplus \ldots \oplus x_s) = -\sum_\sigma \theta_\sigma \log_2 p_\sigma(x_\sigma) \in [0, \infty]$. Weiter sei für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Γ $h_{p,\underline{\theta}} := h_{p^{(\cdot)},\underline{\theta}}$. Es ist $h_{\underline{p},\underline{\theta}} < \infty$, falls $\underline{p} > 0$, und in diesem Fall läßt sich $h_{\underline{p},\underline{\theta}}$ zu einer linearen Funktion auf V_Γ fortsetzen.

Lemma 1.8 *Es gilt $H_{\underline{\theta}}(\Gamma) = H_{\underline{\theta}}(p)$ genau dann, wenn für alle $\underline{x} \in \Gamma$ mit $p(\underline{x}) > 0$ gilt, daß $h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}) = \max_\Gamma h_{p,\underline{\theta}}$. In diesem Fall ist $H_{\underline{\theta}}(\Gamma) = \max_\Gamma h_{p,\underline{\theta}}$.*

Beweis: Die Behauptung ist eine Formulierung der Kuhn–Tucker–Bedingungen, wir zeigen sie hier aber direkt:

Es ist

$$\begin{aligned} H_{\underline{\theta}}(p) &= -\sum_\sigma \theta_\sigma \sum_{x_\sigma \in X_\sigma} p^{(\sigma)}(x_\sigma) \log_2 p^{(\sigma)}(x_\sigma) \\ &= \sum_{\underline{x} \in \Gamma} p(\underline{x}) h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}) && (1) \\ &< \infty && (2) \end{aligned}$$

(dabei folgt die Ungleichung aus der Tatsache, daß $h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}) = \infty$ direkt $p(\underline{x}) = 0$ impliziert).

Ist q eine weitere Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Γ, so ist

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} H_{\underline{\theta}}((1-\epsilon)p + \epsilon q) &= \sum_{\underline{x} \in \operatorname{supp} p} p(\underline{x}) h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}) - \sum_{\underline{x} \in \operatorname{supp} q} q(\underline{x}) h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}) \\ &\in (-\infty, \infty]. && (3) \end{aligned}$$

Da $H_{\underline{\theta}}(p)$ stetig und konkav in p ist, so maximiert p $H_{\underline{\theta}}(p)$ genau dann, wenn (3) für alle q kleiner 0 ist, was offensichtlich dazu äquivalent ist, daß für alle $\underline{x} \in \operatorname{supp} p$ gilt $h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}) = \max_\Gamma h_{p,\underline{\theta}}$.

Die zweite Behauptung folgt direkt aus (1). □

Im Rest des Abschnitts nehmen wir $\theta \in \Theta_0$ an, somit ist die $H_{\underline{\theta}}(\Gamma, \underline{p})$ (auf M) maximierende Wahrscheinlichkeit $\underline{\hat{p}}$ definiert. Wegen $\underline{\hat{p}} \in M$ ist $\underline{\hat{p}} = \hat{p}^{(\cdot)}$ für ein $\hat{p} \in P$, wobei $\hat{p}$ i.a. nicht eindeutig bestimmt ist.

Das eben bewiesene Lemma stellt Bedingungen an die Wahrscheinlichkeiten der Punkte des Trägers von $\hat{p}$, den wir $\hat{\Gamma}$ nennen wollen. Im allgemeinen Falle wird das wesentliche Problem in der Bestimmung von $\hat{\Gamma}$ liegen. In den von uns betrachteten Fällen wird mit $\hat{\Gamma} = \Gamma$ eine besonders gute Situation vorliegen.

Das letzte Lemma können wir etwas umformulieren. Hierzu definieren wir $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_s) : (V_\Gamma)^* \to R$ durch

$$f_\sigma(\underline{a})_{x_\sigma} := \frac{2^{a_\sigma(x_\sigma)/\theta_\sigma}}{\sum_{x'_\sigma \in X_\sigma} 2^{a_\sigma(x'_\sigma)/\theta_\sigma}}.$$

Dann erhalten wir

Lemma 1.9 $\hat{p}^{(\cdot)} \in \underline{f}((\operatorname{lin} \hat{\Gamma})^\perp)$.

Beweis: Es ist $H_{\underline{\theta}}(\Gamma) = H_{\underline{\theta}}(\hat{p})$, also liefert Lemma 1.8, daß $h_{\hat{p},\underline{\theta}}$ maximal $\operatorname{supp} \hat{p} = \hat{\Gamma}$ ist, d.h. daß für ein $\underline{x}^0 \in \hat{\Gamma}$ gilt $\infty > h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x}^0) \geq h_{\hat{p},\underline{\theta}}$ auf Γ. Also ist $h_{\hat{p},\underline{\theta}} \in (V_\Gamma)^*$. Weiter ist nach Lemma 1.8 $a := h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x}^0) - h_{\hat{p},\underline{\theta}} \in (\operatorname{lin} \hat{\Gamma})^\perp$.

Wir erhalten mit der Definition von $h_{\hat{p},\underline{\theta}}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(\sigma)}(x_\sigma) &= 2^{-h_{\hat{p},\underline{\theta}}(x_\sigma)/\theta_\sigma} = 2^{-h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x})/\theta_\sigma} 2^{\sum_{\sigma' \neq \sigma} \theta_{\sigma'} \log_2 \hat{p}^{(\sigma')}(x_{\sigma'})/\theta_\sigma} \\ &= 2^{-h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x}^0)/\theta_\sigma} 2^{\sum_\sigma a(x_\sigma)/\theta_\sigma} 2^{\sum_{\sigma' \neq \sigma} \theta_{\sigma'} \log_2 \hat{p}^{(\sigma')}(x_{\sigma'})/\theta_\sigma}. \end{aligned}$$

Nun ist $\sum_{x_\sigma \in X_\sigma} \hat{p}^{(\sigma)}(x_\sigma) = 1$, also folgt

$$\hat{p}^{(\sigma)}(x_\sigma) = \frac{\hat{p}^{(\sigma)}(x_\sigma)}{\sum_{x'_\sigma} \hat{p}^{(\sigma)}(x'_\sigma)} = \frac{2^{a_\sigma(x_\sigma)/\theta_\sigma}}{\sum_{x'_\sigma \in X_\sigma} 2^{a_\sigma(x'_\sigma)/\theta_\sigma}} = f_\sigma(\underline{a})_{x_\sigma}.$$

□

Weiter können wir $h_{\underline{f}(\underline{a}),\underline{\theta}}$ berechnen:

$$h_{\underline{f}(\underline{a}),\underline{\theta}}(\underline{x}) = -\sum_\sigma \theta_\sigma \left(a_\sigma(x_\sigma)/\theta_\sigma + \log_2 \sum_{x_{\sigma'}} 2^{a_\sigma(x'_\sigma)/\theta_\sigma} \right). \tag{4}$$

Im Falle $\hat{\Gamma} = \Gamma$ haben wir eine einfache Situation, denn hier ist für $\hat{p}^{(\cdot)} = \underline{f}(\underline{a})$ wegen $\underline{a} \in (\operatorname{lin}\Gamma)^\perp$ die Funktion $h_{\underline{f}(\underline{a}),\underline{\theta}}$ konstant auf Γ, also ist die hinreichende Bedingung von 1.8 erfüllt. Wir haben nur noch zu zeigen, daß $\underline{f}(\underline{a})$ ein Randverteilungstripel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Γ ist. Wir haben also:

Lemma 1.10 *Sei $\underline{p} \in \underline{f}((\operatorname{lin}\Gamma)^\perp) \cap M$. Dann ist $p = \hat{p}$.*

Ist $\hat{p}$ bekannt, dann können wir $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$ berechnen, allerdings läßt sich das Resultat einfacher darstellen: Es ist nämlich wegen Lemma 1.8 $\hat{p}^{(\cdot)} = \underline{f}(\underline{a})$ mit $\underline{a} \in (\operatorname{lin}\hat{\Gamma})^\perp$ und (4) für ein $\underline{x}^0 \in \hat{\Gamma}$

$$\begin{aligned} H_{\underline{\theta}}(\hat{p}) &= h_{p,\underline{\theta}}(\underline{x}^0) \\ &= h_{\underline{f}(\underline{a}),\underline{\theta}}(\underline{x}^0) \\ &= -\sum_{\sigma} \theta_\sigma \log_2 \sum_{x_\sigma \in X_\sigma} 2^{a_\sigma(x_\sigma)/\theta_\sigma}. \end{aligned} \tag{5}$$

1.6 Berechnung von $H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!])$

Nun wenden wir die Erkenntnisse des letzten Abschnitts an, um $H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!])$ zu berechnen.

Sei $\Gamma := [\![\underline{n}, m]\!]$. Da $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$ über die Äquivalenzklassen von Hypergraphen faktorisiert, können wir aufgrund von Lemma 1.2 o.E. Γ als aufspannend annehmen. Nach Lemma 1.3 können wir annehmen, daß $\sum_\sigma (n_\sigma - 1) - (m-1) \geq m-1$, also $2(m-1) \leq \sum_\sigma (n_\sigma - 1)$.

Wir nehmen im folgenden weiterhin an, daß $s \geq 3$ und $m \geq 2$, die Fälle $s \leq 2$ und $m = 1$ werden wir gesondert behandeln. Außerdem sei $\forall \sigma\ n_\sigma \geq 2$. Auch hier werden die entsprechenden Berechnungen getrennt durchgeführt.

Zunächst bestimmen wir $(\operatorname{lin}\Gamma)^\perp$.

Lemma 1.11 *Sei $\underline{a} \in (V_\Gamma)^*$. Es ist $\underline{a} \in (\operatorname{lin}\Gamma)^\perp$ genau dann, wenn $\sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma) = 0$ für ein $\underline{x} \in \Gamma$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall \sigma\ a_\sigma(x_\sigma) = a_\sigma(0) + \lambda x_\sigma$.*

Beweis: Sei $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in (\operatorname{lin}\Gamma)^\perp$, d.h. $\sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma) = 0$ für alle $\underline{x} \in \Gamma$.

Sei $\lambda := a_1(1) - a_1(0)$. Da Γ aufspannend ist, gilt $n_2 - 1 \leq m - 1 \leq \sum_{\sigma > 1} n_\sigma - 1$. Hieraus folgt, daß $(0, n_2 - 1, x_3, \ldots, x_s) \in \Gamma$ existiert, damit ist aber auch $(1, n_2 - 2, x_3, \ldots, x_s) \in \Gamma$. Also folgt wegen $a_1(1) + a_2(n_2 - 2) + a_3(0) + \ldots + a_s(0) = 0 = a_1(0) + a_2(n_2 - 1) + a_3(0) + \ldots + a_{s-1}(0) + a_s(0)$, daß $a_2(n_2 - 1) - a_2(n_2 - 2) = \lambda$. Analog gilt für alle $\sigma > 1$, daß $a_\sigma(n_\sigma - 1) - a_\sigma(n_\sigma - 2) = \lambda$. Mit dem gleichen Schluß erhalten wir für alle $\sigma \neq 2$, daß $a_\sigma(n_\sigma - 1) - a_\sigma(n_\sigma - 2) = a_2(1) - a_2(0)$. Daraus folgt $a_2(1) - a_2(0) = a_3(n_3 - 1) - a_3(n_3 - 2) = \lambda$. Wiederum analog folgt für alle σ: $a_\sigma(1) - a_\sigma(0) = \lambda$ und damit auch für alle σ: $a_\sigma(n_\sigma - 1) - a_\sigma(n_\sigma - 2) = \lambda$.

Nun sei $1 \leq x_1 \leq n_1 - 2$ gegeben. Dazu gibt es $(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \Gamma$. Ist dabei nun x_2 maximal gewählt, so gilt entweder $x_2 = n_2 - 1$ oder $x_3, \ldots, x_s = 0$. Im letzteren Fall ist $x_2 \geq 1$ wegen $m - 1 \geq n_1 - 1 > x_1$, also $(x_1, x_2 - 1, 1, 0, \ldots) \in \Gamma$. In beiden Fällen gibt es also ein $\sigma > 1$, so daß $x_\sigma = 1$ oder $x_\sigma = n_\sigma - 1$. O.E. können wir annehmen, daß $\sigma = 2$.

Aber dann folgt aus $a_1(x_1) + a_2(x_2) + a_3(x_3) + \ldots + a_s(x_s) = 0 = a_1(x_1 + 1) + a_2(x_2 - 1) + a_3(x_3) + \ldots + a_s(x_s)$, daß $a_1(x_1 + 1) - a_1(x_1) = a_2(x_2) - a_2(x_2 - 1) = \lambda$ wegen $x_2 \in \{1, n_2 - 1\}$.

Also folgt analog für alle σ und $0 \leq x_\sigma < n_\sigma - 1$, daß $a_\sigma(x_\sigma + 1) - a_\sigma(x_\sigma) = \lambda$, woraus die Behauptung, deren erster Teil trivial ist, folgt.

Sei nun umgekehrt $\underline{x}^0 \in \Gamma$ gegeben mit $\sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma^0) = 0$ und für alle $\sigma, 0 \leq x_\sigma \leq n_\sigma - 1$: $a_\sigma(x_\sigma) = a_\sigma(0) + \lambda x_\sigma$. Dann folgt für alle $\underline{x} \in \Gamma$ $\sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma) = \sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma^0) - \lambda \sum_\sigma x_\sigma^0 + \lambda \sum_\sigma x_\sigma = 0 - \lambda(m-1) + \lambda(m-1) = 0$, also $\underline{a} \in (\operatorname{lin}\Gamma)^\perp$.
$\square$

Lemma 1.12 *Sei $\underline{\theta} \in \Theta_0$. Es ist $\operatorname{lin}\Gamma \cap \underline{f}((\operatorname{lin}\Gamma)^\perp) = \{\underline{p}\}$, wo*

$$p_\sigma(x_\sigma) = \frac{\mu^{x_\sigma/\theta_\sigma}}{\sum_{j=0}^{n^\sigma - 1} \mu^{j/\theta_\sigma}}, \tag{6}$$

wobei

$$g(\mu) := \sum_\sigma g_\sigma(\mu) := \sum_\sigma \frac{\sum_{i=0}^{n_\sigma - 1}(i - \frac{m-1}{s})\mu^{i/\theta_\sigma}}{\sum_{j=0}^{n_\sigma - 1} \mu^{j/\theta_\sigma}} = 0 \tag{7}$$

die Bestimmungsgleichung für μ ist. Ist $2(m-1) \leq \sum_\sigma (n_\sigma - 1)$, so ist $\mu \leq 1$.

Beweis: Sei $\underline{a} \in (\operatorname{lin}\Gamma)^\perp$. Es folgt mit Lemma 1.11, daß ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_\sigma(x_\sigma) := a_\sigma(0) + \lambda x_\sigma$.

Nun ist $\underline{p} \in \underline{f}((\operatorname{lin}\Gamma)^\perp)$ genau dann, wenn $p_\sigma(x_\sigma) = 2^{\lambda a_\sigma(x_\sigma)/\theta_\sigma} / \sum_j 2^{\lambda a_\sigma(j)/\theta_\sigma} = \mu^{x_\sigma/\theta_\sigma} / \sum_j \mu^{j/\theta_\sigma}$, wo $\mu := 2^\lambda$.

Weiter ist $\underline{p} \in \operatorname{lin}\Gamma$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_\sigma \sum_{x_\sigma} a_\sigma(x_\sigma) p_\sigma(x_\sigma) \\
&= \sum_\sigma \frac{\sum_{x_\sigma}(a_\sigma(0) + \lambda x_\sigma)\mu^{x_\sigma/\theta_\sigma}}{\sum_{x_\sigma} \mu^{x_\sigma/\theta_\sigma}} \\
&= \lambda \sum_\sigma \frac{\sum_{x_\sigma} x_\sigma \mu^{x_\sigma}}{\sum_{x_\sigma} \mu^{x_\sigma}} + \lambda \sum_\sigma a_\sigma(0).
\end{aligned}$$

Sei nun $\underline{x} \in \Gamma$. Dann folgt $0 = \sum_\sigma a_\sigma(x_\sigma) = \sum_\sigma a_\sigma(0) + \lambda \sum_\sigma x_\sigma = \sum_\sigma a_\sigma(0) + \lambda(m-1)$. Das liefert $\sum_\sigma \frac{\sum_{x_\sigma} x_\sigma \mu^{x_\sigma}}{\sum_{x_\sigma} \mu^{x_\sigma}} = m-1$, was sofort (7) ergibt.

Also ist $\underline{p} \in \operatorname{lin}\Gamma \cap \underline{f}((\operatorname{lin}\Gamma)^\perp)$ genau dann wenn $\underline{p}$ eine Lösung von (6) und (7) ist.

Nun zeigen wir, daß genau ein $\underline{p}$ existiert, das (6) und (7) erfüllt. Die g_σ sind streng monoton steigend: Wir berechnen hierzu für $\mu > 0$ mittels häufig angewandter Indexvertauschung

$$\begin{aligned}
g'_\sigma(\mu) &= \frac{\left(\sum_i i^2\mu^i\right)\left(\sum_m \mu^m\right) - \left(\sum_i i\mu^i\right)\left(\sum_m m\mu^m\right)}{\left(\sum_j \mu^j\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{ijm}\left(i^2 - im\right)\mu^{i+j+m}}{\left(\sum_j \mu^j\right)^3} \\
&= \frac{\sum_{ijm}\left(i^2 - im - ij + jm\right)\mu^{i+j+m}}{\left(\sum_j \mu^j\right)^3} \\
&= \frac{\sum_i \left(\sum_m (i-m)\mu^m\right)^2 \mu^i}{\left(\sum_j \mu^j\right)^3} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

wobei alle Summationen jeweils von 0 bis $n_\sigma - 1$ laufen.

Also ist auch g streng monoton steigend. Weiter ist offensichtlich $\lim_{\mu\to 0} g(\mu) < 0$ und $g(\mu) > 0$ für hinreichend großes μ (wegen Aufgespanntheit von Γ gilt für alle σ, daß $\sum_{\sigma'\neq\sigma}(n_{\sigma'} - 1) \geq m-1$ (s. Lemma 1.2); wegen der Voraussetzung $\forall\sigma\ \ n_\sigma \geq 2$ folgt $\sum'_\sigma(n_{\sigma'} - 1) > m-1$). Damit existiert genau eine Lösung von (7) und die erste Behauptung des Lemmas ist gezeigt.

Ist nun $2(m-1) \leq \sum_\sigma(n_\sigma - 1)$, so folgt $g(1) = -(m-1) + \sum_\sigma (n_\sigma - 1)/2 \geq 0$, also $\mu \leq 1$. □

Zu Beginn dieses Abschnitts hatten wir angenommen, daß $2(m-1) \leq \sum_\sigma(n_\sigma - 1)$, somit ist $\mu \leq 1$, und die p_σ sind monoton fallend. Nun ist das durch (6) und (7) definierte $\underline{p}$ nach Definition in $\underline{f}((\operatorname{lin}\Gamma)^\perp)$. Um zu zeigen, daß $\underline{p} = \hat{\underline{p}}$, reicht es nach Lemma 1.10 zu zeigen, daß $\underline{p} \in M$. Und hierzu reicht es natürlich zu zeigen, daß ein s–Tupel von monoton fallenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $X_1, \ldots, X_s$ in $\operatorname{lin}\Gamma$ tatsächlich Randverteilungstupel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Γ ist. Dies ist natürlich eine weitaus stärkere Aussage, dennoch führt sie zum Ziel.

Weiter können wir unser Problem auf $\Gamma = [\![n]\!]$ reduzieren. Denn nach den Vorbemerkungen zu Lemma 1.2 ist $[\![\underline{n}, m]\!] \leq [\![m]\!]$. Außerdem läßt sich ein monoton fallendes Verteilungstupel $\underline{p}$ von $\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ durch Ergänzung durch 0 zu einem monoton fallenden Verteilungstupel $\underline{p}'$ von $\llbracket m \rrbracket$ ergänzen (entsprechend der Struktur der zugehörigen Einbettung). Nun läßt sich $V_{\llbracket \underline{n}, m \rrbracket}$ in $V_{\llbracket m \rrbracket}$ einbetten und bezüglich dieser Einbettung ist $\mathrm{lin}\llbracket \underline{n}, m \rrbracket \subset \mathrm{lin}\llbracket m \rrbracket$, also ist $\underline{p}' \in \mathrm{lin}\llbracket m \rrbracket$. Läßt sich dieses nun als Randverteilungtupel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf $\llbracket m \rrbracket$ realisieren, so ist klar, daß p auf $\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ konzentriert ist, also $\underline{p}$ ein Randverteilungstupel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ ist.

Wir können also annehmen, daß $\Gamma = \llbracket n \rrbracket$. Nun erfolgt ein Vorgriff auf die Resultate des zweiten Kapitels. Dort ergibt Satz 2.1 genau, daß ein monoton fallendes Wahrscheinlichkeitstupel $\underline{p} \in \mathrm{lin}\llbracket n \rrbracket$ ein Randverteilungstupel ist (aufgrund von Lemma 1.11 stimmt $\mathrm{lin}\llbracket n \rrbracket$ mit H aus Kapitel 2 überein).

Damit können wir $H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket)$ für $\underline{\theta} \in \Theta_0$ bestimmen. Um nun $H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket)$ für $\underline{\theta} \notin \Theta_0$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst eine Verallgemeinerung unseres Resultates im Falle $\theta \in \Theta_0$:

Sei $\llbracket \underline{n}, m \rrbracket_{\leq} := \{(x_1, \ldots, x_s) : \forall \sigma : 0 \leq x_1 \leq n_\sigma - 1, \sum_\sigma x_\sigma \leq m - 1\}$ und sei $\llbracket \underline{n}, m \rrbracket \subset \Gamma' \subset \llbracket \underline{n}, m \rrbracket_{\leq}$. Dann gilt $H_{\underline{\theta}}(\Gamma') = H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket)$.

Wir brauchen nur zu zeigen, daß die $H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket)$ maximierende Wahrscheinlickeitsverteilung $\hat{p}$ auch $H_{\underline{\theta}}(\Gamma')$ maximiert. Nach Lemma 1.8 reicht es hierzu zu zeigen, daß für alle $\underline{x} \in \operatorname{supp} \hat{p} \subset \llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ gilt $h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x}) = \max_{\Gamma'} h_{\hat{p},\underline{\theta}}$. Nun ist wegen $\hat{p} = f(\underline{a})$ und (4) $h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x}) = -\sum_\sigma \lambda x_\sigma + \text{const.} = (-\lambda) \sum_\sigma x_\sigma + \text{const.}$ Nun ist $\lambda < 0$ wegen $\mu < 1$, also ist $h_{\hat{p},\underline{\theta}}(\underline{x}) = \max_{\Gamma'} h_{\hat{p},\underline{\theta}}$ für $\underline{x} \in \llbracket \underline{n}, m \rrbracket$, was die Behauptung beweist.

Nun können wir zur Betrachtung von $H_{\underline{\theta}}$ im Falle eines beliebigen $\underline{\theta} \in \Theta$ übergehen. O.E. können wir annehmen, daß es ein $s' \leq s$ gibt, so daß für $\sigma \leq s'$ $\theta_\sigma > 0$ und für $\sigma > s'$ $\theta_\sigma = 0$ gilt. Sei $\underline{n}' := (n_1, \ldots, n_{s'})$, $\underline{\theta}' = (\theta_1, \ldots, \theta_{s'})$. Wir können nun mittels $\pi := \pi_{\{1,\ldots,s'\}}$ $\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ auf $\llbracket \underline{n}', m \rrbracket_{\leq}$ projizieren (d.h. wir lassen bei allen $\underline{x}$ die letzten $s - s'$ Koordinaten weg). Offensichtlich ist $\llbracket \underline{n}', m \rrbracket \subset \pi\llbracket \underline{n}, m \rrbracket \subset \llbracket \underline{n}', m \rrbracket_{\leq}$. Weiter ist offensichtlich $H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket) = H_{\underline{\theta}'}(\pi\llbracket \underline{n}, m \rrbracket)$.

Ist $\llbracket \underline{n}', m \rrbracket$ aufspannend und $\sum_{\sigma \leq s'}(n_\sigma - 1) \geq 2(m-1)$, so erhalten wir mit obigem $H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket) = H_{\underline{\theta}'}(\llbracket \underline{n}', m \rrbracket)$, wobei letzteres mit der Standardmethode berechenbar ist. Die Resultate sehen aus wie in (6) und (7), nur laufen die σ–Summationsindizes nur über die σ mit $\theta_\sigma > 0$.

Ist $\sum_{\sigma \leq s'}(n_\sigma - 1) < 2(m-1)$, so ist $H_{\underline{\theta}'}(\llbracket \underline{n}', m \rrbracket_{\leq}) = \sum_\sigma \log_2 n_\sigma$: Offensichtlich ist $\llbracket \underline{n}', m' \rrbracket \subset \pi\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ für alle $m' \geq m - \sum_{\sigma > s'}(n_\sigma - 1)$. Nach Voraussetzung an m ist also $\llbracket \underline{n}', 1 + \epsilon + \sum_{\sigma \leq s'}(n_\sigma - 1)/2 \rrbracket \subset \pi\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$, wo $\epsilon = \pm 1/2$ oder $\epsilon = 0$ je nach Ganzzahligkeit von $\sum_{\sigma < s'}(n_\sigma - 1)$. Da $\sum_\sigma H(p_\sigma) \leq \sum \log_2 n_\sigma$ für jedes Wahrscheinlichkeitstupel $\underline{p}$, haben wir nur zu zeigen, daß die Gleichverteilung auf den Koordinaten als Randverteilungstupel einer Verteilung auf $\pi\llbracket \underline{n}, m \rrbracket$ realisierbar ist.

Falls $\sum_{\sigma \leq s'}(n_\sigma - 1)/2$ ganzzahlig ist, so ist das Gleichverteilungstupel offensichtlich in $\mathrm{lin}\llbracket \underline{n}', \sum_{\sigma \leq s'}(n_\sigma - 1)/2 \rrbracket$, außerdem ist es monoton fallend. Also ist das Gleichverteilungstupel als Randverteilungstupel einer Verteilung auf $[\![\underline{n}', \sum_{\sigma\leq s'}(n_\sigma - 1)/2]\!]$ und damit auch auf $\pi[\![\underline{n}, m]\!]$ realisierbar.

Ist $\sum_{\sigma\leq s'}(n_\sigma - 1)/2$ keine ganze Zahl, so können wir zunächst annehmen, daß $n_1 \geq 2$ (sonst kann diese Koordinate offensichtlich weggelassen werden), dann ändern wir beim Gleichverteilungstupel die erste Komponente dadurch ab, daß wir den Anteil bei 0 auf Kosten des Anteils bei $n_1 - 1$ so lange erhöhen, bis $\sum_i ip_1(i) = n_1/2 - 1$ (dies ist möglich!). Dieses Tupel ist nach Konstruktion in $\mathrm{lin}[\![\underline{n}, -1/2 + \sum_{\sigma\leq s'}(n_\sigma - 1)/2]\!]$, wir können wieder unseren Satz über monotone Randverteilungen anwenden und dieses Tupel als Randverteilungstupel einer Verteilung auf $\pi[\![\underline{n}, m]\!]$ realisieren. Ziehen wir unser Tupel vom Doppelten des Gleichverteilungstupels ab, so läßt sich dieses nach Anwendung von Lemma 1.3 als Randverteilungstupel auf $[\![\underline{n}, 1/2 + \sum_{\sigma\leq s'}(n_\sigma - 1)/2]\!]$ realisieren. Also läßt sich die Gleichverteilung als Randverteilungstupel einer Verteilung auf $\pi[\![\underline{n}, m]\!]$ darstellen, und wir erhalten ingesamt, daß das Gleichverteilungstupel als Randverteilungstupel einer Verteilung auf $\pi[\![\underline{n}, m]\!]$ realisiert werden kann.

Bleibt nur noch der Fall zu betrachten, daß $[\![\underline{n}', m]\!]$ nicht aufspannend ist und $\sum_{\sigma<s'}(n_\sigma - 1) \geq 2(m-1)$. Da $[\![\underline{n}', m]\!]$ nicht aufspannend ist, gilt $\sum_\sigma n_\sigma - 1 < (m-1) + (m-1) = 2(m-1)$. Also tritt dieser Fall gar nicht auf.

Bis auf die Sonderfälle haben wir also bewiesen:

Satz 1.13 *Sei $[\![\underline{n}, m]\!]$ aufspannend, $\sum_\sigma(n_\sigma - 1) \geq 2(m-1)$, $m \geq 1$, $s \geq 1$. Dann ist*

$$H_{\underline{\theta}}([\![\underline{n}, m]\!]) = \begin{cases} \sum_{\sigma:\theta_\sigma>0} \theta_\sigma \log_2 \left(\sum_{i=0}^{n_\sigma-1} \mu^{i/\theta_\sigma}\right) & \text{für } \sum_{\sigma:\theta_\sigma>0}(n_\sigma - 1) > 2(m-1) \\ \sum_{\sigma:\theta_\sigma>0} \theta_\sigma \log_2 n_\sigma & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$g(\mu) := \sum_{\sigma:\theta_\sigma>0} \frac{\sum_{i=0}^{n_\sigma-1}(i - \frac{m-1}{s})\mu^{i/\theta_s}}{\sum_{i=0}^{n_\sigma-1} \mu^{i/\theta_s}} = 0$$

die Bestimmungsgleichung für μ im ersteren Fall ist.

Beweis: Für $s \geq 3$ und $m \geq 2$ haben wir die Behauptung bewiesen, die maximierende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist bekannt, und die Formel folgt aus (5). Für $m = 1$ ist $[\![\underline{n}, m]\!]$ einpunktig und für die einzige Verteilung p auf $[\![\underline{n}, m]\!]$ ist $H_{\underline{\theta}}(\Gamma) = 0$. Andererseits ist wegen der Aufgespanntheit von $[\![\underline{n}, m]\!]$ auch für alle σ $n_\sigma = 1$, die obige Formel liefert also $H_{\underline{\theta}}(\Gamma) = \log_2 1 = 0$.

Für $s = 2$ liefert die Aufgespanntheit $n_1 = n_2 = m$, und die Gleichverteilungen auf $[\![\underline{n}, m]\!]$ liefern Gleichverteilungstupel als Randtupel, die offensichtlich die Entropie maximieren. Andererseits liefert auch hier die obige Formel (zweiter Fall) $H_{\underline{\theta}}(\Gamma) = \log_2 m$.

Analog schließt man im Fall $s = 1$.

Der Fall „$n_\sigma = 1$ für mindestens ein σ“ kann offensichtlich durch eine Reduktion auf die σ mit $n_\sigma > 1$ berechnet werden. Da eine positive Skalierung von $\underline{\theta}$ sowohl für $H_{\underline{\theta}}(\Gamma)$ als auch für das Resultat nur zu einer entsprechenden Skalierung führt, ist der obige Satz auch für $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^3_{\geq 0}$ gültig. Weiter tragen sowohl für $H_{\underline{\theta}}(p)$ als auch für das Resultat die Summanden mit $n_\sigma = 1$ nicht bei, somit gilt das Resultat auch für diesen Fall. $\square$

Auf eine explizite Darstellung von $H_{\underline{\theta}}(\llbracket \underline{n}, m \rrbracket)$ ohne Einschränkung auf Aufgespanntheit und $\sum_\sigma (n_\sigma - 1) \geq 2(m-1)$ wollen wir verzichten.

2 Randverteilungspolytope

Sei $(X_1, \ldots, X_s, \Gamma)$ ein s–partiter Hypergraph[2], d.h. $X_1, \ldots, X_s$ sind nichtleere endliche Mengen und Γ ist eine nichtleere Teilmenge von $\prod_\sigma X_\sigma$. Ist p eine (Wahrscheinlichkeits)verteilung p auf Γ, so bezeichnen wir die Randverteilungen von p auf $X_1, \ldots, X_s$ mit $p^{(1)}, \ldots, p^{(s)}$. Wir definieren nun

$$R := \{\underline{p} = (p_1, \ldots, p_s) : \forall\sigma\ p_\sigma \text{ Verteilung auf } X_\sigma\}$$

als die Menge der Verteilungstupeln und

$$M := M(\Gamma) := \{(p^{(1)}, \ldots, p^{(s)}) : p \text{ ist Verteilung auf } \Gamma\}.$$

als die Menge der Randverteilungstupeln.

M und R sind Polytope und $M \subset R$. Während R ein einfach strukturiertes Polytop, nämlich das s–fache Produkt von Simplices ist, kann $M(\Gamma)$ recht komplex werden.

Eine interessante Frage ist, wie für gegebenes $\underline{p} \in R$ entschieden werden kann, ob $\underline{p} \in M$. Nach der Dualitätstheorie für Systeme linearer Ungleichungen ist $\underline{p} \in M$ genau dann, wenn für alle reellen Funktionen f_σ auf X_σ gilt

$$\sum \int f_\sigma dp_\sigma \leq \max\left\{\sum f_\sigma(x_\sigma) : (x_1, \ldots, x_s) \in \Gamma\right\}. \tag{8}$$

(Die Notwendigkeit ist trivial; nicht aber, daß (8) hinreichend ist.) Für gegebenes $\underline{p}$ ist diese Bedingung allerdings recht schwierig nachzuweisen.

Im ersten Abschnitt behandeln wir den Fall $X_1 = \ldots = X_s = X = \{0, \ldots, n-1\}$ ($s \geq 1$ beliebig) und

$$\Gamma := \{(x_1, \ldots, x_s) \in X^s : \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma = n - 1\}.$$

Hierbei werden wir zeigen, daß für monotone Verteilungstupel $\underline{p} \in R$ durch eine einzige Gleichung entschieden wird, ob $\underline{p} \in M(\Gamma)$.

Weiter werden wir zeigen, daß das Polytop der monotonen Tupel in $M(\Gamma)$ insofern recht verschieden von $M(\Gamma)$ ist, als daß $M(\Gamma)$ für $s > 2$ eine in n exponentielle Anzahl von Facetten hat, wogegen das Polytop der monotonen Tupel in $M(\Gamma)$ eine in n lineare Anzahl von Facetten bsitzt. Insbesondere folgt daraus, daß die Frage „$\underline{p} \in M$?“ im allgemeinen nicht durch Gleichungen entschieden werden kann, denn R hat als s–faches Produkt von Simplices nur sn Facetten, damit hätte auch M höchstens sn Facetten, im Gegensatz zu dem oben Gesagten.

[2]Aufgrund der eigenständigen Bedeutung dieses Kapitels wiederholen wir hier die Definitionen der schon aus dem vorigen Kapitel bekannten Begriffe bzw. geben vereinfachte Versionen davon an.

Außerdem wollen wir auf den Fall $s = 2$ eingehen, bei dem weitere Vereinfachungen möglich sind und in vielen Fällen die Struktur von $M(\Gamma)$ recht genau dargestellt werden kann. Es ergibt sich auch hier, daß wir für eine bestimmte Folge von Hypergraphen Γ ein in $\max_\sigma |X_\sigma|$ exponentielles Wachstum der Anzahl der Facetten von $M(\Gamma)$ erreichen können.

2.1 Der Fall des Gittersimplex

Es sei in diesem Abschnitt $X_1 := \ldots := X_s := X := \{0, \ldots, n-1\}$ und

$$\Gamma := \{(x_1, \ldots, x_s) \in X^s : \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma = n-1\}.$$

2.1.1 Realisierung von monotonen Verteilungstupeln als Randverteilungstupel

Setzen wir $f_\sigma(i) := i - \frac{n-1}{s}$ für alle σ, so ist $\pm \sum f_\sigma(x_\sigma) = 0$ auf Γ, also liefert die (triviale) Notwendigkeit von (8), daß $\sum \int f_\sigma \mathrm{d}p_\sigma = 0$, d.h.

$$h(\underline{p}) := \sum_\sigma \sum_i \left(i - \frac{n-1}{s}\right) p_\sigma(i) = 0 \tag{9}$$

für alle $\underline{p} \in M$.

Wir nennen nun eine Verteilung q auf X fallend, wenn $q(i+1) \leq q(i)$ für alle $i = 0, \ldots, n-2$. Analog nennen wir eine Verteilung q auf X steigend, wenn $q(i+1) \geq q(i)$. Verteilungstupel nennen wir fallend (steigend), wenn alle Komponenten fallend (steigend) sind. Ein wesentliches Resultat dieses Kapitels ist, daß für fallende Verteilungstupel die Gleichung (9) sogar hinreichend für $\underline{p} \in M(\Gamma)$ ist.

Wir definieren

$$R^> := \{\underline{p} \in R : \ \forall \sigma \ \ p_\sigma \text{ fallend}\}$$

und

$$H := \{\underline{p} \in (\mathbb{R}^n)^s : h(\underline{p}) = 0\}.$$

$R^>$ ist ein Polytop und H eine Hyperebene in $(\mathbb{R}^n)^s$. Wie wir gesehen haben, ist $M \subset R \cap H$, also $R^> \cap M \subset R^> \cap H$. Wir können nun den Hauptsatz dieses Kapitels in einfacher Weise formulieren.

Satz 2.1

$$R^> \cap M = R^> \cap H. \tag{10}$$

Wir werden im folgenden den Beweis geben, wobei die dabei verwendeten Lemmata im Beweis an entsprechender Stelle eingefügt sind.

Beweis: Die Inklusion „$\subset$" folgt aus $M \subset H$, was wir schon oben gezeigt hatten. Also reicht es „$\supset$" zu zeigen, was mittels Induktion nach n und s erfolgt. Ein Teil des Induktionsanfangs ist klar, nämlich $n = 1$ und $s \geq 1$ beliebig. Der andere Teil, nämlich $n \geq 2$ und $s = 1$, ist auch klar, denn aus der Forderung $0 = h(\underline{p}) = \sum_{i=0}^{n-1}(i - n - 1)p_1(i)$ folgt sofort, daß p_1 eine Punktverteilung bei $n-1$ ist, was der Voraussetzung widerspricht, daß p_1 eine fallende Verteilung ist. Im folgenden können wir also annehmen, daß $n, s \geq 2$.

Da beide Seiten von (10) Polytope sind, reicht es zu zeigen, daß die Ecken von $R^> \cap H$ in M liegen. Folglich bestimmen wir zunächst die Ecken von $R^> \cap H$. Weil H eine Hyperebene ist, sind solche Ecken Schnitte von Kanten von $R^>$ mit H. Es ist bekannt und einfach zu sehen, daß die Ecken des Polytops der fallenden Verteilungen auf $\{0, \ldots, n-1\}$ die Verteilungen $r_1, \ldots, r_n$ sind, wo

$$r_m(i) := \begin{cases} \frac{1}{m+1} & \text{für } i \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

Da wir häufig s–Tupel solcher Verteilungen zu betrachten haben, wollen wir für ein s–Tupel $\underline{m} \in \{0, \ldots, n-1\}^s$ die Abkürzung $\underline{r}_{\underline{m}} := (r_{m_1}, \ldots, r_{m_s})$ einführen.

$R^>$ ist ein direktes Produkt von s Kopien des Polytops der fallenden Verteilungen. Eine Kante eines solchen Produkts ist ein Produkt einer Kante und $s-1$ Ecken in irgendeiner Reihenfolge. Die Ecken von $R^> \cap H$ sind also von der Form $\{(1-\lambda)\underline{r}_{\underline{m}} + \lambda(\underline{r}_{\underline{m}'}) : \lambda \in [0,1]\}$, wobei sich $\underline{m}' = (m'_1, \ldots, m'_s)$ genau in einer Komponente von $\underline{m}$ unterscheidet. Ohne Einschränkung können wir (aufgrund der Symmetrie) annehmen, daß dies die s–Komponente sei und weiter, daß $m_s < m'_s$ und $m_1 \geq \ldots \geq m_{s-1}$ gilt.

Wir betrachten also nur Ecken von $R^> \cap H$ der Form

$$\begin{aligned} \underline{p} = (1-\lambda)\underline{r}_{\underline{m}} + \lambda \underline{r}_{\underline{m}'}, \qquad & m_1 = m'_1, \ldots, m_{s-1} = m'_{s-1}, \\ & m_1 \geq \ldots \geq m_{s-1}, \\ & m_s < m'_s, \end{aligned} \tag{12}$$

wo λ so gewählt ist, daß $\underline{p} \in H$. Nun ist $h(\underline{r}_{\underline{m}}) = -(n-1) + \sum_\sigma \sum_i i r_{m_\sigma}(i) = -(n-1) + \sum_\sigma m_\sigma/2$. Folglich liefert die Bedingung $\underline{p} \in H$, daß $0 = (1-\lambda)h(\underline{r}_{\underline{m}}) + \lambda h(\underline{r}_{\underline{m}'}) = -(n-1) + \sum_{\sigma<s} m_\sigma/2 + (1-\lambda)m_s/2 + \lambda m'_s/2 = -(n-1) + \lambda(m'_s - m_s)/2 + \frac{1}{2}\sum_\sigma m_\sigma$, also

$$\lambda = \frac{2(n-1) - \sum_\sigma m_\sigma}{m'_s - m_s}. \tag{13}$$

Wegen $0 \leq \lambda \leq 1$ haben wir die folgenden Ungleichungen

$$\sum_\sigma m_\sigma \leq 2(n-1) \leq \sum_\sigma m'_\sigma = \sum_{\sigma<s} m_\sigma + m'_\sigma \tag{14}$$

Die Idee des weiteren Vorgehens ist die folgende: Wir zerlegen $\underline{p}$ in eine Konvexkombination zweier (nicht notwendig fallender) Verteilungstupel, die beide einen kleineren Träger haben (auf welchen sie fallend sind) und auf die die Induktionsannahmen angewendet werden können.

Zur Anwendung der Induktion nach n wählen wir $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und betten den Hyperwürfel $\{0, \ldots, n-k-1\}^s$ in den Hyperwürfel $\{0, \ldots, n-1\}^s$ ein mittels der Abbildung $\varphi := \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_s$, wobei φ_σ für $\sigma < s$ die natürlichen Einbettungen von $\{0, \ldots, n-k-1\}$ in $\{0, \ldots, n-1\}$ ist und φ_s definiert ist durch $\varphi_s(i) = i + k$. Diese Einbettung φ hat die Eigenschaft, daß $\underline{\varphi}^{-1}(\Gamma_{n,s}) = \Gamma_{n-k,s}$ (mit offensichtlicher Notation; ähnliche Notationen verwenden wir für R, M und $R^>$).

Lemma 2.2 *Unter der Induktionsannahme gilt Folgendes: Sind* $1 \leq k \leq n-1$ *und* $\underline{u} \in R \cap H$ *der Gestalt, daß* $u_1(n-1-i) = \ldots = u_{s-1}(n-1-i) = u_s(i) = 0$ *für* $0 \leq i \leq k-1$, $u_1, \ldots, u_{s-1}$ *fallend und* u_s *fallend auf* $\{k, \ldots, n-1\}$, *dann gilt* $\underline{u} \in M$.

Beweis: Wir definieren $\underline{\varphi} : R_{n-k,s} \to R_{n,s}$ durch $\underline{\varphi}(\underline{q}) := (\varphi_1(q_1), \ldots, \varphi_s(q_s))$. Damit gilt für jede Verteilung q auf Γ_{n-k}, daß das Randverteilungstupel von $\varphi(q)$ das Bild unter $\underline{\varphi}$ des Randverteilungstripels von q ist. Also wird $M_{n-k,s}$ durch $\underline{\varphi}$ in $M_{n,s}$ abgebildet. Außerdem ist $h_{n-k,s}(\underline{q}) = -(n-k-1) + \sum_\sigma \sum_{i=0}^{n-k-1} iq_\sigma(i) = -(n-k-1) + \sum_{\sigma<s} \sum_{i=0}^{n-1} i(\varphi_\sigma q_\sigma)(i) + \sum_{i=0}^{n-1}(i-k)(\varphi_s q_s)(i) = h_{n,s}(\underline{\varphi}(\underline{q}))$. Erfüllt nun $\underline{u} \in R_{n,s} \cap H_{n,s}$ die Annahmen des Lemmas, so ist klar, daß ein (eindeutiges) $\underline{q} \in R^>_{n-k,s}$ existiert derart, daß $\underline{u} = \underline{\varphi}\underline{q}$. Die obige Rechnung zeigt, daß $\underline{q}$ sogar in $R^>_{n-k,s} \cap H_{n-k,s}$ ist, also folgt mittels der Induktionsannahme, daß $\underline{q} \in M_{n-k,s}$, also $\underline{u} \in M_{n,s}$. $\square$

Die Anwendung der Induktionsannahme der Induktion nach s erfolgt i.a. gleichzeitig mit einer Anwendung der Induktion nach n: Wir wählen $m_1, \ldots, m_{s-1} \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $2(n-1) \geq \sum_{\sigma<s} m_\sigma \geq n-1$, damit gilt für

$$m := \sum_{\sigma<s} m_\sigma - (n-1) + 1,$$

daß $n \geq m > 0$. Nun betten wir den Hyperquader $Q := \prod_{\sigma<s}\{0, \ldots, \min(m, m_\sigma) - 1\} \subset \{0, \ldots, m-1\}^s$ in den Hyperwürfel $\{0, \ldots, n-1\}^s$ mittels der Abbildung $\varphi := \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_{s-1} \times 0$ ein, wobei φ_σ durch $\varphi_\sigma(i) := m_\sigma - i$ definiert ist. Diese Einbettung φ hat die Eigenschaft, daß $\varphi^{-1}(\Gamma_{n,s}) \subset \Gamma_{m,s-1}$. Gilt nämlich $\varphi(y_1, \ldots, y_{s-1}) = (x_1, \ldots, x_s) \in \Gamma_{n,s}$, so folgt $x_s = 0$ und $\sum_\sigma x_{\sigma<s} = n-1$, also $\sum_{\sigma<s} y_\sigma = \sum_{\sigma<s}(m_\sigma - x_\sigma) = (m-1) + (n-1) - (n-1) = m-1$.

Lemma 2.3 *Unter der Induktionsannahme gilt Folgendes: Sind* $\underline{v} \in R \cap H$ *und* $m_1, \ldots, m_{s-1}$ *derart, daß* $0 < m := \sum_{\sigma<s} m_\sigma - (n-1) + 1 \leq n$, $v_s(0) = 1$ *und für* $\sigma < s$ *gilt, daß* $v_\sigma(i) > 0$ *nur für* $i \in \{\max(m_\sigma - m + 1, 0), \ldots, m_\sigma\}$ *und* v_σ *dort steigend ist, dann gilt* $\underline{v} \in M$.

Beweis: Sei $R' := \{\underline{p} \in R_{m,s-1} : \forall\sigma \ \operatorname{supp} p_\sigma \subset \{0,\ldots,\min(m,m_\sigma)-1\}\}$. Wir definieren $\underline{\varphi} : R' \to R_{n,s}$ durch $\underline{\varphi}(\underline{q}) := (\varphi_1(q_1),\ldots,\varphi_{s-1}(q_{s-1}), I_{\{0\}})$. Damit gilt für jede Verteilung q auf $\Gamma_{m,s-1} \cap Q$, daß das Randverteilungstupel von $\varphi(q)$ das Bild unter $\underline{\varphi}$ des Randverteilungstripels von q ist. Also wird $M_{m,s-1} \cap R'$ durch $\underline{\varphi}$ in $M_{n,s}$ abgebildet. Außerdem ist $h_{m,s-1}(\underline{q}) = -(m-1) + \sum_{\sigma=1}^{s-1} \sum_{i=0}^{m-1} iq_\sigma(i) = -(m-1) + \sum_{\sigma<s} \sum_{i=0}^{n-1} (m_\sigma - i)(\varphi_\sigma q_\sigma)(i) = (n-1) - \sum_{i=0}^{n-1} i(\varphi_\sigma q_\sigma)(i) = -h_{n,s}(\underline{\varphi}(\underline{q}))$. Erfüllt nun $\underline{v} \in R_{n,s} \cap H_{n,s}$ die Annahmen des Lemmas, so ist klar, daß ein (eindeutiges) $\underline{q} \in R^{>}_{m,s-1} \cap R'$ existiert derart, daß $\underline{v} = \underline{\varphi}\underline{q}$. Die obige Rechnung zeigt, daß $\underline{q}$ sogar in $R^{>}_{m,s-1} \cap H_{m,s-1}$ ist, also folgt mittels der Induktionsannahme, daß $\underline{q} \in M_{m,s-1}$, also $\underline{q} \in M_{m,s-1} \cap R'$ und damit $\underline{v} \in M_n$. $\square$

Nun sei $\underline{p}$ eine Ecke von $R^{>} \cap H$.

Wie oben bemerkt, schreiben wir $\underline{p}$ als Konvexkombination $\underline{p} = (1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v}$, wobei $\underline{u}, \underline{v} \in R \cap H$ (bis auf eine Permutation der Koordinaten) die Voraussetzungen der Lemmata 2.2 bzw. 2.3 erfüllen.

Bei dieser Aufspaltung muß die Struktur von $\underline{p}$ berücksichtigt werden. Wir fahren deshalb fort mit der Behandlung verschiedener Fälle, die nach der Gestalt von $p_1(n-1),\ldots,p_s(n-1)$ unterschieden werden. Zunächst gibt es die Möglichkeit, daß $p_\sigma(n-1) = 0$ für alle $\sigma < s$ (Fall 1). Sind alle $p_\sigma(n-1)$ gleich Null bis auf $p_{\sigma_0}(n-1)$ und $\sigma_0 < s$, so folgt $\sigma_0 = 1$ wegen $m_1 \geq \ldots \geq m_{s-1}$ (Fall 2). Sind mindestens zwei der $p_\sigma(n-1)$ größer 0, so wird dies von den Fällen $p_1(n-1) > 0$ und $p_s(n-1) > 0$ (Fall 3) bzw. $p_1(n-1) > 0$ und $p_2(n-1) > 0$ (Fall 4) abgedeckt.

Ist $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ — in diesem Fall ist die letzte Koordinate nicht ausgezeichnet —, so gibt es die Möglichkeiten, daß keines oder nur eines der $p_\sigma(n-1)$ größer Null ist — dies wird in Fall 1 behandelt —, oder mindestens zwei größer Null sind — dies fällt in Fall 4—, so daß wir in Fall 2 und 3 annehmen können, daß $0 < \lambda < 1$.

Fall 1: $p_\sigma(n-1) = 0$ für alle $\sigma < s$. Wir zerlegen $\underline{p}$ durch $\underline{p} = (1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v}$, wo $\underline{u}$ die Voraussetzungen von Lemma 2.2 mit $k = 1$ und $\underline{v}$ die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllt.

Wäre ein die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllendes $\underline{v}$ schon gegeben, so könnte man $\alpha := p_s(0)$ setzen. Wäre $\alpha = 1$, so wäre $p_s(0) = 1$, also $m_s = 0$, $\lambda = 0$, damit $\sum_\sigma m_\sigma = 2(n-1)$; $\underline{p}$ würde somit die Voraussetzungen von Lemma 2.3 mit $m = n-1$ erfüllen ($p_1,\ldots,p_{s-1}$ sind ja konstant), und wir wären fertig. Also können wir annehmen $\alpha = p_s(0) < 1$. Weiter würden wir $\underline{u} := (\underline{p} - \alpha\underline{v})/(1-\alpha)$ definieren. Wäre $\underline{u}$ ein Verteilungstupel, so wäre die Voraussetzung von Lemma 2.2 erfüllt, denn $u_1(n-1) = \ldots = u_{s-1}(n-1)$ folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $\underline{p}$ und die Monotonie aus den entsprechenden Eigenschaften von $\underline{v}$. Anwendung von Lemma 2.2 auf $\underline{u}$ und von Lemma 2.3 auf $\underline{v}$ liefert dann $\underline{u}, \underline{v} \in M$ und damit $\underline{p} \in M$.

Damit reicht es, ein die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllendes Verteilungstupel $\underline{v}$ zu finden derart, daß $\alpha\underline{v} \leq \underline{p}$ ist. Da die s–Komponente diese Bedingung per Definition erfüllt, reicht es sogar nur zu zeigen, daß $\alpha v_\sigma \leq p_\sigma = r_{m_\sigma}$ für $\sigma < s$ ist. Hierzu das folgende Lemma:

Lemma 2.4 *Sei* $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_{s-1}) \in \{0, \ldots, n-1\}^{s-1}$ *gegeben mit der Eigenschaft, daß für* $m := \sum_{\sigma<s} m_\sigma - (n-1) + 1$ *gilt* $0 < m \leq n$. *Dann gibt es ein* s*–Tupel* $\underline{v}$ *von Verteilungen auf* $\{0, \ldots, n-1\}$ *mit den folgenden Eigenschaften:* $h(\underline{v}) = 0$, $v_s(0) = 1$, *für* $\sigma < s$ *ist* $v_\sigma > 0$ *nur auf* $\{\max(m_\sigma - m + 1, 0), \ldots, m_\sigma\}$, *dort steigend und* $\frac{m}{n} v_\sigma \leq r_{m_\sigma}$.

Den Beweis dieses Lemmas geben wir im Anschluß an den momentanen Beweis. Wir fahren nun fort mit dem Beweis des Satzes.

Die Ungleichungen (14) liefern zum einen, daß $\sum_\sigma m_\sigma \leq 2(n-1)$, also $\sum_{\sigma<s} m_\sigma \leq 2(n-1)$, und damit gilt für das in Lemma 2.4 durch $m_1, \ldots, m_s$ definierte m, daß $m \leq n$. Zum anderen liefern sie $\sum_{\sigma<s} m_\sigma + m'_\sigma \geq 2(n-1)$, also $\sum_\sigma m_{\sigma<s} \geq n-1$ und damit $m > 0$. Wir können also Lemma 2.4 auf $\underline{m} := (m_1, \ldots, m_{s-1})$ anwenden und erhalten ein $\underline{v}$, das die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllt.

Nun ist nur noch zu zeigen, daß $\alpha v_\sigma = p_s(0) v_\sigma \leq p_\sigma = r_{m_\sigma}$ für $\sigma < s$ ist. Wegen der letzten Aussage des Lemmas 2.4 reicht es zu zeigen, daß $p_s(0) \leq \frac{m}{n}$.

Mit (12) und (13) erhalten wir

$$\begin{aligned} p_s(0) &= (1-\lambda) r_{m_s}(0) + \lambda r_{m'_s}(0) = \frac{m'_s + 1 - \lambda(m'_s - m_s)}{(m'_s+1)(m_s+1)} \\ &= \frac{1}{m'_s+1} \left(\frac{m'_s - 2(n-1) + \sum_{\sigma<s} m_\sigma}{m_s + 1} + 1 \right). \end{aligned}$$

Wegen (14) ist der Zähler des letzten Ausdrucks nichtnegativ, also erhalten wir durch das Ersetzen von m_s durch dessen minimalen Wert 0

$$p_s(0) \leq 1 + \frac{-2(n-1) + \sum_{\sigma<s} m_\sigma}{m'_s + 1}.$$

Wegen (14) ist $-2(n-1) + \sum_{\sigma<s} m_\sigma \leq 0$, also erhalten wir durch das Ersetzen von m'_s durch dessen maximalen Wert $n-1$

$$p_s(0) \leq \frac{-n + 2 + \sum_{\sigma<s} m_\sigma}{n} = \frac{m}{n}.$$

Damit ist dieser Fall abgeschlossen.

Fall 2: $p_s(n-1) > 0$, $p_\sigma(n-1) = 0$ für $\sigma < s$. Dieser Fall wird ähnlich dem ersten Fall behandelt, hier werden allerdings permutierte Versionen von den Lemmata 2.2–2.4 benötigt, die ja offensichtlich auch gelten. (Eine Verallgemeinerung der entsprechenden Lemmata ist unwesentlich und erschwert nur die Lesbarkeit.)

In dem vorliegenden Fall sind die Lemmata mit vertauschten Rollen der Koordinaten 1 und s zu lesen.

Wir zerlegen $\underline{p}$ durch $\underline{p} = (1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v}$, wo $\underline{u}$ die Voraussetzungen von Lemma 2.2 (in permutierter Version) mit $k = 1$ und $\underline{v}$ die Voraussetzungen von Lemma 2.3 (in permutierter Version) angewandt auf $\underline{r}_{m'}$ erfüllt.

Aus $p_1(n-1) > 0$ folgt $m_1 = n-1$. Weiter folgt aus (14) $\sum_{\sigma>1} m'_\sigma \geq n-1$, und damit gilt für $m := \sum_{\sigma>1} m'_\sigma - (n-1) + 1$, daß $m > 0$. Weiter liefert (14) $\sum_{\sigma>1} m_\sigma \leq n-1$ und damit $m \leq \sum_{1<\sigma<s} m_\sigma + (n-1) - (n-1) + 1 \leq n$. Wir können damit Lemma 2.4 (in permutierten Version) auf $(m'_2, \ldots, m'_s)$ anwenden und erhalten ein $\underline{v}$, das die Voraussetzungen von Lemma 2.3 (in permutierter Version) erfüllt.

Nun setzt man $\alpha := p_1(0) = 1/n$ und $\underline{u} := (\underline{p} - \alpha\underline{v})/(1-\alpha)$. Wäre $\underline{u}$ ein Verteilungstupel, so wäre die Voraussetzung von Lemma 2.2 (in permutierter Version) erfüllt, denn $u_2(n-1) = \ldots = u_s(n-1)$ folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $\underline{p}$ und die Monotonie aus den entsprechenden Eigenschaften von $\underline{v}$. Anwendung von Lemma 2.2 auf $\underline{u}$ und von Lemma 2.3 auf $\underline{v}$ liefert dann $\underline{u}, \underline{v} \in M$ und damit $\underline{p} \in M$.

Damit reicht es zu zeigen, daß $\alpha\underline{v} \leq \underline{p}$. Da die 1–Komponente diese Bedingung per Definition erfüllt, reicht es zu zeigen, daß $\alpha v_\sigma = \frac{1}{n} v_\sigma \leq \lambda r_{m'_\sigma} \leq p_\sigma$ für $\sigma > 1$.

Laut der letzten Aussage von 2.4 gilt $\frac{m}{n} v_\sigma \leq r_{m'_\sigma}$ für $\sigma > 1$, also $\alpha v_\sigma \leq \frac{1}{m} r_{m'_\sigma}$ für $\sigma > 1$. Also reicht es zu zeigen, daß $m\lambda \geq 1$.

Beachtet man $m_1 = n-1$ und setzt die Definition von m und (13) ein, so haben wir

$$\left(\sum_{1<\sigma<s} m_\sigma + m'_s - (n-1) + 1\right)\left((n-1) - \sum_{\sigma>1} m_\sigma\right) \geq m'_s - m_s$$

zu zeigen. Der erste Faktor ist m und damit ≥ 1. Der zweite Faktor ist wegen $\lambda > 0$ (s. Betrachtung der Fallunterscheidung) und Ganzzahligkeit auch ≥ 1. Damit ist das Produkt der beiden Faktoren größer als deren Summe; also ist die geforderte Ungleichung gezeigt und der Fall beendet.

Fall 3: $p_1(n-1) > 0$, $p_s(n-1) > 0$, $p_\sigma(n-1) = 0$ für $1 < \sigma < s$. Damit ist $m_1 = m'_s = n-1$. Wir zerlegen $\underline{p}$ durch $\underline{p} = (1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v}$, wo $\underline{u}$ die Voraussetzungen von Lemma 2.2 mit $k = m_s + 1$ und $\underline{v}$ die Voraussetzungen von Lemma 2.2 in permutierter Version (1 und s vertauscht) mit $k = n-1-\sum_{\sigma>1} m_\sigma$ erfüllt.

Wir definieren explizit

$$m := n - 2 - \sum_{\sigma>1} m_\sigma,$$

$$\alpha := \frac{n-m-1}{n},$$

$$\begin{array}{ll} u_1 := r_m, & v_1 := r_{m+1,n-1}, \\ u_2 := r_{m_2}, & v_2 := r_{m_2}, \\ \vdots & \vdots \\ u_{s-1} := r_{m_{s-1}} & v_{s-1} := r_{m_{s-1}}, \\ u_s := r_{m_s+1,n-1} & v_s := r_{m_s}, \end{array}$$

wobei r_{k_1,k_2} definiert ist durch

$$r_{k_1,k_2}(i) := \begin{cases} \frac{1}{k_2-k_1+1} & \text{für } k_1 \leq i \leq k_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zunächst ist wegen der linken Ungleichung in (14), die wegen $\lambda > 0$ scharf gilt, $\sum_{\sigma>1} m_\sigma < n-1$ (man beachte $m_1 = n-1$), also wegen Ganzzahligkeit $\sum_{\sigma>1} m_\sigma \leq n-2$. Wegen der rechten Ungleichung in (14) haben wir $\sum_{\sigma>1} m_\sigma \geq \sum_{1<\sigma<s} m_\sigma \geq 0$ (beachte $m_1 = m'_s = n-1$). Also haben wir $0 \leq m \leq n-2$, und damit sind $\underline{u}, \underline{v}$ wohldefiniert und offensichtlich Verteilungstupel.

Weiter ist $\sum_i i r_{k_1,k_2}(i) = (k_1+k_2)/2$. Damit erhalten wir $h(\underline{u}) = -(n-1) + m/2 + \frac{1}{2}\sum_{\sigma>1} m_\sigma + n/2 = 0$. Analog folgt $h(\underline{v}) = 0$. Die übrigen Voraussetzungen von Lemma 2.2 ergeben sich mit $k = m+1$ bzw. $k = m_s + 1$ sofort.

Nach Anwendung von Lemma 2.2 ergibt sich also $(1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v} \in M$. Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß $\underline{p} = (1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v} \in M$. Für die Komponenten 2 bis einschließlich $s-1$ ergibt sich das sofort. Für die erste Komponente rechnet man stellvertretend $(1-\alpha)u_1(0) + \alpha v_1(0) = ((m+1)/n)/(m+1) + 0 = 1/n = p_1(0)$ und $(1-\alpha)u_1(n-1) + \alpha v_1(n-1) = ((n-m-1)/n)/(n-m-1) = 1/n = p_1(n-1)$. Weiter sind p_s und $(1-\alpha)u_s + \alpha v_s$ auf den Mengen $\{0,\ldots,m_s\}$ und $\{m_s+1,\ldots,n-1\}$ jeweils konstant. Da beides Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind, reicht es $p_s(n-1) = (1-\alpha)u_s(n-1) + \alpha v_s(n-1)$, d.h. $p_s(n-1) = (1-\alpha)u_s(n-1)$ zu zeigen. Nun ist aber $p_s(n-1) = \lambda/n = ((n-1) - \sum_{\sigma>1} m_\sigma)/(n(n-1-m_s)) = ((m+1)/n)/(n-1-m_s) = (1-\alpha)u_s(n-1)$. Damit ist $\underline{p} = (1-\alpha)\underline{u} + \alpha\underline{v}$ und dieser Fall abgehandelt.

Fall 4: $p_1(n-1) > 0$, $p_2(n-1) > 0$. Hier haben wir $m_1 = m_2 = n-1$. Also folgt aus (14) $m_\sigma = 0$ für $\sigma > 2$ und damit aus (13) $\lambda = 0$. Also ist $\underline{p} = (r_{n-1}, r_{n-1}, r_0, \ldots, r_0)$. Diese Verteilung ist aber Randverteilung von der Gleichverteilung auf $\{(i, n-1-i, 0, \ldots, 0) : 0 \leq i \leq n-1\}$. Folglich ist $\underline{p} \in M$.

Die besprochenen Fälle decken alle Möglichkeiten ab, damit ist unser Satz gezeigt. $\square$

Beweis von Lemma 2.4: Es reicht zu zeigen:

Sei $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \{0, \ldots, n-1\}^s$ gegeben mit der Eigenschaft, daß für $m := \sum_\sigma m_\sigma - (n-1) + 1$ gilt $0 < m \leq n$. Dann gibt es ein s–Tupel $\underline{v}$ von Verteilungen auf $\{0, \ldots, n-1\}$ mit den folgenden Eigenschaften: $h(\underline{v}) = 0$, für alle σ ist $v_\sigma > 0$ nur auf $\{\max(m_\sigma - m + 1, 0), \ldots, m_\sigma\}$, dort wachsend und $\frac{m}{n} v_\sigma \leq r_{m_\sigma}$.

Denn die Aussage des Lemmas erhalten wir durch die Anwendung der obigen Aussage auf das $(s-1)$–Tupel $m_1, \ldots, m_{s-1}$.

Wir können weiterhin annehmen, daß $m < n$ ist. Denn sonst ist $h(\underline{r}_{\underline{m}}) = -(n-1) + \frac{1}{2}\sum_\sigma m_\sigma = 0$, und $\underline{v} := \underline{r}_{\underline{m}}$ erfüllt die Aussagen des Satzes.

Wir übernehmen die Bezeichnung r_{k_1,k_2} aus dem vorigen Beweis, also

$$r_{k_1,k_2}(i) := \begin{cases} \frac{1}{k_2-k_1+1} & \text{für } k_1 \leq i \leq k_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien nun $k_1, \ldots, k_s \in \{0, \ldots, n-1\}^s$ gegeben mit $0 \leq k_\sigma \leq m_\sigma$ und sei $\underline{v}_{\underline{k}} := (r_{m_1-k_1,m_1}, \ldots, r_{m_s-k_s,m_s})$ — ein erster Ansatz für $\underline{v}$. Die erste Forderung an $\underline{v}$ ist $h(\underline{v}) = 0$. Also berechnen wir zunächst $h(\underline{v}_{\underline{k}}) = -(n-1) + \sum_\sigma \frac{2m_\sigma - k_\sigma}{2} = (m-1) - \sum_\sigma k_\sigma/2$. Also ist $h(\underline{v}_{\underline{k}}) = 0$ genau dann, wenn $\sum_\sigma k_\sigma = 2(m-1)$.

Nun berechnen wir, für welche $t \in [0,1]$ gilt, daß $t\underline{v}_{\underline{k}} \leq \underline{r}_{\underline{m}}$. Offensichtlich gilt dies für alle $t \leq \min_\sigma \frac{k_\sigma+1}{m_\sigma+1}$. Damit also t möglichst groß gewählt werden kann, sind die k_σ unter der Nebenbedingung $\sum_\sigma k_\sigma = 2(m-1)$ offensichtlich so zu wählen, daß das Verhältnis von $(k_\sigma+1)$ zu $(m_\sigma+1)$ möglichst wenig von σ abhängt.

Optimal wäre, wenn das Verhältnis gar nicht von σ abhängen würde; wegen der Ganzzahligkeit der k_σ ist dies aber nicht möglich.

Deshalb erweitern wir unseren Ansatz und führen zusätzlich ein s–Tupel $\underline{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in [0,1]^s$ ein und definieren ein Verteilungstupel $\underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}}$, wobei die Komponente σ definiert ist durch $(\underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}})_\sigma := (1-\mu_\sigma) r_{m_\sigma-k_\sigma,m_\sigma} + \mu_\sigma r_{m_\sigma-k_\sigma-1,m_\sigma}$. Offensichtlich erfüllt $\underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}}$ die Träger- und Monotoniebedingungen an $\underline{v}$, so daß wir uns nur um die Erfüllung der Bedingungen $h(\underline{v}) = 0$ und $\frac{m}{n} v_\sigma \leq r_{m_\sigma}$ zu kümmern haben.

Nun berechnen wir: $h(\underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}}) = -(n-1) + \frac{1}{2}\sum_\sigma((1-\mu_\sigma)(2m_\sigma - k_\sigma) + \mu_\sigma(2m_\sigma - k_\sigma - 1)) = (m-1) - \sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma)/2$. Also sind $\underline{k}, \underline{\mu}$ so zu wählen, daß

$$\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) = 2(m-1). \tag{15}$$

Weiterhin ist $t\underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}} \leq \underline{r}_{\underline{m}}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} t &\leq \min_\sigma \frac{\frac{1}{m_\sigma+1}}{\frac{1-\mu_\sigma}{k_\sigma+1} + \frac{\mu_\sigma}{k_\sigma+2}} \\ &= \min_\sigma \frac{(k_\sigma+1)(k_\sigma+2)}{(k_\sigma+2-\mu_\sigma)(m_\sigma+1)}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{(k_\sigma+1)(k_\sigma+2)}{k_\sigma+2-\mu_\sigma} = k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma), \tag{16}$$

wo ψ_{k_σ} eine stetige, streng monotone Funktion auf $[0,1]$ ist mit $\psi_{k_\sigma}(0) = 0$ und $\psi_{k_\sigma}(1) = 1$. Für

$$t \le \frac{k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)}{m_\sigma + 1} \tag{17}$$

ist also $t\underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}} \le \underline{r}_{\underline{m}}$.

Um unsere Behauptung zu beweisen, benötigen wir $\underline{k}, \underline{\mu}$, die sowohl (15) als auch (17) für alle σ und $t = m/n$ erfüllen.

Naheliegend ist es, die Ungleichung (17) soweit möglich als Gleichung mit einem Parameter $c \in [0,1]$ an der Stelle von t zu erfüllen, d.h. als Bestimmungsgleichung für $\underline{k}$ und $\underline{\mu}$ anzusehen, und schließlich c so festzulegen, daß sowohl $c \ge m/n$ als auch (15) gilt.

Wir setzen also

$$k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) := \begin{cases} m & \text{falls } \; c(m_\sigma+1) \ge m \\ c(m_\sigma+1) & \text{falls } \; m \ge c(m_\sigma+1) \ge 1 \\ 1 & \text{falls } \; 1 \ge c(m_\sigma+1) \end{cases}$$

Zunächst ist die rechte Seite wohldefiniert, weil die Definitionen an den Überlappungen ($c(m_\sigma+1) = m$ und $c(m_\sigma+1) = 1$) übereinstimmen. Weiterhin ist wegen $\underline{\mu} \in [0,1]^s$ und der Eigenschaften von ψ_{k_σ} auch k_σ und μ_σ wohldefiniert.

Weiterhin erfüllt $\underline{v} := \underline{v}_{\underline{k},\underline{\mu}}$ für $c \ge m/n$ bis auf $h(\underline{v}) = 0$ die Voraussetzungen an $\underline{v}$: Die Trägerbedingung ist durch die Definition von $\underline{k}, \underline{\mu}$ erfüllt, Monotonie folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der $r_{i,j}$, es ist also nur noch für alle σ zu zeigen, daß $\frac{m}{n} v_\sigma \le r_{m_\sigma}$. Hierfür reicht es aufgrund von (17) aus, $k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) \ge (m/n)(m_\sigma+1)$ zu zeigen. Für $m \ge c(m_\sigma+1) \ge 1$ gilt dies nach Definition von $\underline{k}, \underline{\mu}$ und wegen $c \ge m/n$. Für $c(m_\sigma+1) \le 1$ ist $k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) = 1 \ge c(m_\sigma+1) \ge (m/n)(m_\sigma+1)$. Schließlich gilt für $c(m_\sigma+1) \ge m$, daß $k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) = m = (m/n)n \ge (m/n)(m_\sigma+1)$.

Bleibt noch nachzuweisen, daß ein $c \in [m/n, 1]$ gewählt werden kann, so daß für die entsprechenden k_σ, μ_σ die Gleichung (15) erfüllt ist.

Weil die ψ_{k_σ} stetig sind, hängt $k_\sigma + \mu_\sigma$ stetig von c ab, also auch $h(\underline{v})$. Die Existenz eines c, so daß (15) gilt, können wir mit dem Zwischenwertsatz bewerkstelligen. Wir müssen nur zeigen, daß $\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) \ge 2(m-1)$ für $c = 1$ und $\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) \le 2(m-1)$ für $c = m/n$.

Für $c = 1$ ist $k_\sigma = \min\{m-1, m_\sigma\}$, $\mu_\sigma = 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $m_1 \ge \ldots \ge m_s$. Sei $\tau \in \{0, \ldots, s\}$ gegeben mit $m_\sigma \ge m-1$ für $\sigma \le \tau$ und $m_\sigma < m-1$ für $\sigma > \tau$. Damit folgt $\sum_\sigma k_\sigma \ge \tau(m-1)$. Für $\tau \ge 2$ sind wir also fertig. Für $\tau = 0$ ist $\sum_\sigma k_\sigma = \sum_\sigma m_\sigma =$

$n+m-2 \geq 2(m-1)$. Für $\tau = 1$ gilt mit der Abschätzung $m_s - 1 \leq n-1$, daß $\sum_\sigma k_\sigma = (m-1) + \sum_{\sigma>1} m_\sigma \geq (m-1) + ((n-1)+(m-1)-(n-1)) = 2(m-1)$. Also gilt für $c=1$, daß $\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) \geq 2(m-1)$.

Bleibt schließlich zu zeigen, daß für $c = \nu := m/n$ die entsprechenden $\underline{k}, \underline{\mu}$ die Gleichung (15) erfüllen. Da dies recht aufwendig ist, wollen wir zunächst die Restbehauptung zusammenfassen: Sind $m_1, \ldots, m_s \in \{0, \ldots, n-1\}$, $m \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben mit

$$\sum_\sigma m_\sigma = (n-1) + (m-1), \tag{18}$$

und sind die k_σ, μ_σ definiert durch

$$k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) := \max(1, \min(m, \nu(m_\sigma + 1))), \tag{19}$$

so gilt

$$\sum_\sigma k_\sigma + \mu_\sigma \leq 2(m-1). \tag{20}$$

Nun ist in (19) $\nu(m_\sigma + 1) = \frac{m}{n}(m_\sigma + 1) \leq m$, so daß wir (19) ersetzen können durch

$$k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) := \max(1, \nu(m_\sigma + 1)). \tag{21}$$

Wir ändern die Voraussetzung $m_\sigma \in \{0, \ldots, n-1\}$ ab zu $m_\sigma \in \mathbb{N}'$. Dies ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung, da für $m_\sigma = 0$ gilt $k_\sigma = \mu_\sigma = 0$ und damit die entsprechenden Terme weder zu (18) noch zu (20) etwas beitragen. Weiterhin ersetzen wir n durch m/ν. Wegen $m \geq 1$ gilt dann $\nu > 0$.

Für $\nu = 1$ gilt die Behauptung sicherlich. Denn dann ist $\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) = \sum_\sigma m_\sigma = (n-1) + (m-1)$. Damit reicht es zu zeigen: Sind $m_1, \ldots, m_s, m \in \mathbb{N}'$, $\nu \in (0,1)$ gegeben mit

$$\sum_\sigma m_\sigma = (1 + \nu^{-1})m - 2, \tag{22}$$

und sind die k_σ, μ_σ durch (21) definiert, so gilt

$$\sum_\sigma k_\sigma + \mu_\sigma \leq 2m - 2. \tag{23}$$

Als nächstes zeigen wir, daß wir annehmen können, daß für alle σ die Ungleichung $\nu(m_\sigma + 1) \geq 1$ gilt. Sei nämlich die Behauptung in diesem Fall schon bewiesen. Wir zeigen, daß dann die Behauptung schon allgemein gilt. Hierzu betrachten wir die Teilmenge T der σ, für die $\nu(m_\sigma + 1) \geq 1$ gilt.

Ist $\sum_{\sigma \in T} m_\sigma > 2m-2$, so können wir ein $\nu' > \nu$ einführen, so daß $\sum_{\sigma \in T} m_\sigma = (1 + {\nu'}^{-1})m - 2$. Offensichtlich gilt dann auch für alle $\sigma \in T$, daß $\nu'(m_\sigma + 1) \geq 1$. Für die mit ν' anstatt ν definierten k'_σ, μ'_σ erfüllen dann nach Annahme $\sum_{\sigma \in T}(k'_\sigma +$

$\mu'_\sigma) \le 2(m-2)$. Aber wegen $\nu < \nu'$ und $k_\sigma + \mu_\sigma = 0$ für $\sigma \notin T$ folgt $\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) = \sum_{\sigma\in T}(k_\sigma + \mu_\sigma) \le \sum_{\sigma\in T}(k'_\sigma + \mu'_\sigma) \le 2(m-2)$.

Ist aber $\sum_{\sigma\in T} m_\sigma \le 2m-2$, dann ist $\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) = \sum_{\sigma\in T}(k_\sigma + \mu_\sigma) \le \sum_{\sigma\in T} m_\sigma \le 2m-2$.

Wir können also annehmen, daß für alle σ die Ungleichung $\nu(m_\sigma + 1) \ge 1$ gilt. Somit reicht es also, die Behauptung in vereinfachter Form zu zeigen, wo nämlich (21) ersetzt ist durch

$$k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) = \nu(m_\sigma + 1). \tag{24}$$

Nun beweisen wir die Ungleichung

$$k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) \ge k_\sigma + \mu_\sigma + \nu. \tag{25}$$

Aus dieser Ungleichung folgt nämlich

$$\begin{aligned}\sum_\sigma (k_\sigma + \mu_\sigma) &\le \sum_\sigma (k_\sigma + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) + 1 - \nu) = \sum_\sigma (\nu(m_\sigma + 1) - \nu)\\ &= \nu \sum_\sigma m_\sigma = \nu(1+\nu^{-1})m - 2 = (1+\nu)m - 2 \le 2(m-2).\end{aligned}$$

Isoliert man in (16) das auf der linken Seite auftretende μ_σ, setzt dies in (25) auf der rechten Seite ein und setzt auf der linken Seite die Definition von $k_\sigma + 1 + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)$ ein, so ist zu zeigen

$$\nu(m_\sigma + 1) \ge 2(k_\sigma + 1) - \frac{(k_\sigma + 1)(k_\sigma + 2)}{\nu(m_\sigma + 1)} + \nu,$$

also

$$\nu^2(m_\sigma + 1)^2 \ge 2\nu(k_\sigma + 1)(m_\sigma + 1) - (k_\sigma + 1)(k_\sigma + 2) + \nu^2(m_\sigma + 1). \tag{26}$$

Nun ist $x^2 = (x+a)(x-a) + a^2$. Angewandt auf $x = \nu(m_\sigma + 1)$ und $a = k_\sigma + 2 - \nu(m_\sigma + 1)$, erhält man

$$\nu^2(m_\sigma + 1)^2 = (k_\sigma + 2)(2\nu(m_\sigma + 1) - (k_\sigma + 2)) + (k_\sigma + 2 - \nu(m_\sigma + 1))^2.$$

Eingesetzt in (26) haben wir

$$2\nu(m_\sigma + 1) - (k_\sigma + 2) + (k_\sigma + 2 - \nu(m_\sigma + 1))^2 \ge \nu^2(m_\sigma + 1),$$

d.h.

$$(k_\sigma + 1 - \nu(m_\sigma + 1))(k_\sigma + 2 - \nu(m_\sigma + 1)) + \nu(1-\nu)(m_\sigma + 1) \ge 0$$

zu zeigen.

Wird noch die Definition von $\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)$ eingesetzt, so ist

$$\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)(1-\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)) \leq \nu(1-\nu)(m_\sigma+1) \tag{27}$$

zu zeigen.

Wegen $\nu(m_\sigma+1) \geq 1$ ist $\nu \in [1/(m_\sigma+1), 1]$. Für $\nu \in [1/(m_\sigma+1), 1/2]$ gilt $\nu(1-\nu) \geq (1/2)/(m_\sigma+1)$, also $\nu(1-\nu)(m_\sigma+1) \geq 1/2$; andererseits ist $\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)(1-\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)) \leq 1/4$ wegen $0 \leq \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) \leq 1$. Analog schließt man für $\nu \in [1/2, m_\sigma/(m_\sigma+1)]$.

Für $\nu \in [m_\sigma/(m_\sigma+1), 1]$ haben wir $k_\sigma = m_\sigma - 1$, also $m_\sigma + \psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) = \nu(m_\sigma+1)$, d.h. $1-\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) = (1-\nu)(m_\sigma+1)$, also $\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma) \leq \nu$ und $\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)(1-\psi_{k_\sigma}(\mu_\sigma)) \leq \nu(1-\nu)(m_\sigma+1)$, was zu zeigen war.

Damit ist unsere Behauptung und das Lemma bewiesen. □

2.1.2 Eine Abschätzung für die Anzahl von Facetten von M

Diese Abschätzung wird liefern, daß das Polytop M der Randverteilungen recht komplex ist.

Wir beginnen mit einer generellen Betrachtung von Seiten und Facetten von Randverteilungspolytopen für beliebige $\Gamma \subset \prod X_\sigma$.

Wir bemerken zuerst, daß die Menge von Ecken von $M(\Gamma)$

$$\{I_{\underline{x}} := (I_{x_1}, \ldots, I_{x_s}) : \underline{x} \in \Gamma\}$$

ist, wo I_x für $x \in X_\sigma$ die Indikatorfunktion von $\{x\}$ bezeichnet. Denn $M(\Gamma)$ wird einerseits offensichtlich durch diese Menge erzeugt, andererseits verschwindet $(1-I_{x_1}, \ldots, 1-I_{x_s}) \in E^*$ auf $I_{\underline{x}}$ und ist positiv auf allen anderen $I_{\underline{y}}$, schneidet also die Ecke $I_{\underline{x}}$ aus.

Jede Seite von $M(\Gamma)$ wird durch die Ecken erzeugt, die sie enthält, d.h. durch

$$\{I_{\underline{x}} : \underline{x} \in \Gamma_S\},$$

wo Γ_S eine durch S eindeutig bestimmte Teilmenge von Γ ist. Weil $M(\Gamma) \subset R$ in einem 0 nicht enthaltenden affinen Unterraum von $E := \operatorname{lin} R$ lebt, wird die Seite S durch eine Linearform $\underline{f} \in E^*$ ausgeschnitten mit $\underline{f} = 0$ auf S und $\underline{f} > 0$ auf $M(\Gamma) \setminus S$. Somit haben wir:

$$\Gamma_S = \{\underline{x} : \sum_\sigma f_\sigma(x_\sigma) = 0\}.$$

Wenn wir eine Teilmenge von Γ, die in der Form Γ_S dargestellt werden kann, als seitig bezeichnen, so haben wir eine Bijektion $S \mapsto \Gamma_S$ zwischen den Seiten von $M(\Gamma)$ und den seitigen Teilmengen von Γ. Unter dieser Bijektion entsprechen den Facetten von $M(\Gamma)$ die maximalen seitigen, echten Teilmengen von Γ.

Wir bezeichnen nun mit π_σ die Projektion von Γ auf X_σ, d.h. $\pi_\sigma(\underline{x}) = x_\sigma$ für $\underline{x} \in \Gamma$. Weiter bezeichnen wir Γ als aufspannend, wenn alle π_σ surjektiv sind. Wir nennen eine Seite S von $M(\Gamma)$ aufspannend, falls Γ_S aufspannend ist.

Es ist einfach zu sehen, daß eine nicht aufspannende Facette von $\pi_\sigma^{-1}(X \setminus \{x_\sigma\})$ für ein $\sigma \in \{1, \ldots, s\}, x_\sigma \in X_\sigma$ erzeugt wird. Also ist die Anzahl nicht aufspannender Facetten durch die Summe der Größen der X_σ beschränkt. Da es unser Ziel ist, ein exponentielles Wachstum der Anzahl von Facetten für bestimmte Γ nachzuweisen, werden wir uns im wesentlichen auf die Betrachtung aufspannender Facetten beschränken.

Nun kommen wir wieder zu unserem Spezialfall $X = \{0, \ldots, n-1\}$, $\Gamma := \{\underline{x} \in X^s : \sum_\sigma x_\sigma = n-1\}$ zurück. Wir werden zunächst den Fall $s = 3$ betrachten. Hier sind die Projektionen π_σ offensichtlich surjektiv. Wir werden nun zeigen, daß $M = M(\Gamma)$ mindestens $2^{n-2} - 1$ aufspannende Facetten hat.

Für $\emptyset \neq A \subset \{0, \ldots, n-3\}$ definieren wir die Teilmenge $\bar{A}$ von Γ durch

$$\begin{aligned} \bar{A} := \quad & \{(i, n-3-i, 2) : i \in A\} \\ \cup \quad & \{(i, n-2-i, 1) : 0 \leq i \leq n-2\} \\ \cup \quad & \{(i, n-1-i, 0) : i-1 \notin A\}. \end{aligned}$$

Falls Γ als diskretes Dreieck betrachtet wird, so befindet sich $\bar{A}$ auf den letzten drei Zeilen von Γ in der folgenden Weise: In Zeile 2 haben wir A repräsentiert, Zeile 1 ist komplett vertreten, und Zeile 0 ist das Komplement einer vertikalen Kopie von Zeile 2.

Satz 2.5 *Sei $n \geq 2$. Es existiert genau eine aufspannende Facette $S(A)$ von M derart, daß $\bar{A} \subset \Gamma_{S(A)}$, und die Abbildung $A \mapsto S(A)$ ist injektiv.*

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sei $\underline{f} \in E^*$ eine Linearform, die eine aufspannende echte Seite S aus M ausschneidet, wobei $\bar{A} \subset \Gamma_S$. Insbesondere haben wir für alle $\underline{x} \in \bar{A}$, daß $\sum_\sigma f_\sigma(x_\sigma) = 0$, und für alle $\underline{x} \in \Gamma$, daß $\sum_\sigma f_\sigma(x_\sigma) \geq 0$.

Die Aufgespanntheit von S bedeutet, daß Γ_S surjektive Projektionen hat. Wegen $\bar{A} \subset \Gamma_S$ ist dies a priori für π_1 und π_2 erfüllt. Folglich ist S aufspannend genau dann, wenn

$$f_3(k) = - \min_{i,j: i+j+k=n-1} f_1(i) + f_2(j) \tag{28}$$

für alle $k \geq 3$.

Wir können zu $\underline{f}$ eine Linearkombination von $\underline{h}, (0, 1, -1), (1, -1, 0) \in E^*$ addieren (dabei ist $\underline{h}$ definiert wie im vorigen Abschnitt, und ± 1 bezeichnet die konstante Funktion ± 1 auf X), weil diese auf ganz M verschwindet. Folglich können wir annehmen, daß $f_3(0) = f_3(2)$, $f_3(1) = 0$ und $f_1(0) = 0$, und mittels einer Skalierung von $\underline{f}$, daß $f_3(0) \in \{\pm 1, 0\}$. Die Bedingung $\bar{A} \in \Gamma_S$ liefert nun für die Zeile 1 von $\bar{A}$:

(Zeile 1) Für alle $0 \leq i \leq n-2$ haben wir $(i, n-2-i, 1) \in \bar{A}$, also $f_1(i) + f_2(n-2-i) = 0$.

Die Zeile 2 liefert:

(Zeile 2) Für $1 \leq i \leq n-2$ haben wir $(i-1, n-2-i, 2) \in \Gamma$, folglich erhalten wir unter der Verwendung der Folgerungen der Zeile 1, daß $0 \leq f_1(i-1) + f_2(n-2-i) + f_3(2) = f_1(i-1) - f_1(i) + f_3(0)$, d.h. $f_1(i) \leq f_1(i-1) + f_3(0)$.

Ändern wir i zu $i+1$ ab, so erhalten wir $f_1(i+1) \leq f_1(i) + f_3(0)$ für $0 \leq i \leq n-3$. Darüber hinaus ist $f_1(i+1) = f_1(i) + f_3(0)$, falls $i \in A$.

Die Zeile 0 liefert:

(Zeile 0) $(i+1, n-2-i, 0) \in \Gamma$ für $0 \leq i \leq n-2$, also $0 \leq f_1(i+1) + f_2(n-2-i) + f_3(0) = f_1(i+1) - f_1(i) + f_3(0)$, d.h. $f_1(i+1) \geq f_1(i) - f_3(0)$. Darüber hinaus ist $f_1(i+1) = f_1(i) - f_3(0)$, falls $i \notin A$.

Sei nun $i \in A$. Dann liefert (Zeile 2) und (Zeile 0) zusammen $f_3(0) = f_1(i+1) - f_1(i) \geq -f_3(0)$, also $f_3 \geq 0$ und somit $f_3(0) \in \{0, 1\}$.

Angenommen, $f_3(0)$ wäre 1. Die Bedingung $f_1(0) = 0$ bestimmt zusammen mit (Zeile 2) und (Zeile 0) f_1 völlig. (Zeile 1) bestimmt $f_2(i)$ für $i \leq n-2$. Da aber nach Definition $(0, n-1, 0) \in \bar{A}$, so erhalten wir mit unserem bisherigen Wissen $f_2(n-1) = -1$. Folglich sind f_2 und (wegen (28)) auch f_3 völlig bestimmt. Andererseits ist klar nach (28), daß $\underline{f}$ eine aufspannende Seite S' von M ausschneidet, mit $\bar{A} \subset \Gamma_{S'}$. S' ist echt, weil offensichtlich für $i \in A$ gilt, daß $(i, n-1-i, 0) \notin \Gamma_{S'}$.

Eine ähnliche Argumentation zeigt, daß $f_3(0) = 0$ zu $\underline{f} = 0$ und $\Gamma_S = \Gamma$ führt; da wir aber S als Facette angenommen haben, fällt dieser Fall weg.

Somit haben wir gezeigt, daß es genau eine echte Seite $S(A)$ von M gibt, so daß $\bar{A} \subset \Gamma_S$. Diese Seite ist notwendig eine Facette. Nun bestimmt $S(A)$ zusammen mit der Normalisierung $f_3 = 1$ die Linearform eindeutig $\underline{f}$, die wiederum durch (Zeile 0) und (Zeile 2) A bestimmt. Damit ist die Abbildung $A \mapsto S(A)$ injektiv. $\square$

Der letzte Satz liefert nun die untere Schranke $2^{n-2} - 1$ für die Anzahl der Facetten, da für jede nichtleere Teilmenge A der Menge $\{0, \ldots, n-3\}$ eine zugehörige Facette $S(A)$ existiert und die Abbildung $A \mapsto S(A)$ injektiv ist.

Im Falle von $s > 3$ haben wir mindestens genauso viele Facetten. Wir argumentieren wie folgt: Gemäß der natürlichen Einbettung $\Gamma_{n,3}$ in $\Gamma_{n,s}$ vermöge $\mathrm{id}_X \times \mathrm{id} \times \mathrm{id} \times 0 \times \ldots \times 0$ können wir $\Gamma_{n,3}$ als Teilmenge von $\Gamma_{n,s}$ auffassen. Offensichtlich ist $\Gamma_{n,3}$ dabei eine seitige Teilmenge von $\Gamma_{n,s}$, denn sie wird von $(1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$ aus $\Gamma_{n,s}$ ausgeschnitten. Dies liefert offensichtlich auch eine Einbettung von $M(\Gamma_{n,3})$ in $M(\Gamma_{n,s})$. Schneidet $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ eine aufspannende

Seite S aus $M(\Gamma_{n,3})$ aus, so schneidet $\underline{f}' = (f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_s)$, wo $f_\sigma(i) := \min_{x_1,\ldots,x_{\sigma-1}:\sum_{\tau<\sigma} x_\tau = n-1-i} \sum_{\tau<\sigma} f_\tau(x_\tau)$ für $\sigma > 3$ rekursiv definiert ist, eine Seite S' aus $M(\Gamma_{n,s})$ aus, so daß $M(\Gamma_{n,s}) \cap S' = S$. Starten wir mit einer Facette S von $M(\Gamma_{n,3})$, so ist S' in einer Facette S'' von $M(\Gamma_{n,s})$ enthalten, die zu S'' zugehörige Ausschneidefunktion sei $\underline{f}''$. Dann ist aber $\Gamma_S = \Gamma_{S''} \cap \Gamma_{n,3}$, denn die rechte Seite wird aus $M(\Gamma_{n,3})$ durch (f_1'', f_2'', f_3'') (modulo konstanten Funktionen) ausgeschnitten, andererseits enthält $\Gamma_{S''} \cap \Gamma_{n,3}$ sicher Γ_S; da aber S eine Facette ist, bleibt nur noch, daß entweder die Behauptung stimmt oder $\Gamma_{S''} \cap \Gamma_{n,3} = \Gamma_{n,3}$. In letzterem Fall folgt dann aber aufgrund der Aufgespanntheit von S'', daß $(f_1'', f_2'', f_3'') = \underline{h}$ und damit offensichtlich $\Gamma_{S''} = \Gamma_{n,s}$ im Widerspruch zur Annahme, daß $\Gamma_{S''}$ eine Facette sei. Damit erhalten wir zu jeder Facette von $M(\Gamma_{n,3})$ eine Facette von $M(\Gamma_{n,s})$, aus der sich die zugehörige Facette von $\Gamma_{n,3}$ wieder zurückgewinnen läßt. Damit hat $M(\Gamma_{n,s})$ mindestens so viele Facetten wie $M(\Gamma_{n,3})$, also mindestens $2^{n-2} - 1$.

Das Upper–Bound–Theorem (s. z.B. [9]) liefert die folgende Ungleichung für ein Polytop P

$$\binom{m+1}{k} |\mathcal{S}_m(P)| \leq \binom{|\mathcal{S}_0(P)| + k - 1 - m}{k} |\mathcal{S}_{m-k}(P)|,$$

wo $\mathcal{S}_m(P)$ die Anzahl m–dimensionaler Seiten von P ist und $0 \leq k \leq m$.

Nun ist $|\mathcal{S}_0(M(\Gamma))| \leq |\Gamma| \leq n^{s-1}$. Setzen wir nun $m := \dim M(\Gamma) - 1 \leq n(s-1) - 1$, d.h. m ist die Dimension der Facetten, $k := m$, so folgt

$$\binom{m+1}{m} |\mathcal{S}_m(M(\Gamma))| \leq \binom{n^{s-1} - 1}{m} n^{s-1} \leq 2^{sm\log(n)} \leq 2^{s^2 n \log_2(n)}.$$

Wir haben also folgende obere und untere Schranken für den Logarithmus der Anzahl $\mathcal{S}_{-1}(M(\Gamma))$ der Facetten von $M(\Gamma)$

$$n - 3 \leq \log |\mathcal{S}_{-1}(M(\Gamma_{n,s}))| \leq s^2 n \log_2 n.$$

2.2 Der Fall von durch Ordnungsrelationen gegebenen bipartiten Graphen

Wir haben also den Fall $s = 2$ vor uns. Eine Charakterisierung von Randverteilungspaaren durch lineare Ungleichungen in diesem Fall wurde zuerst von Dall'Aglio [4] und Kellerer [10] gegeben. Unsere Grundlage bildet allerdings die später entwickelte Dualitätstheorie für Systeme linearer Ungleichungen.

2.2.1 Facetten und Ordnungsideale

Wir betrachten zunächst beliebige $\Gamma \subset X_1 \times X_2$. Wie wir sehen werden, lassen sich hier die Randverteilungspolytope, insbesondere deren Facetten, besser beschreiben als im allgemeinen Fall.

Sei also $\Gamma \subset X_1 \times X_2$ beliebig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Wir interpretieren $\Gamma \subset X_1 \times X_2$ als die Kantenmenge eines bipartiten Graphen auf $X_1 \dot\cup X_2$, den wir als $G(\Gamma)$ bezeichnen. Dies liefert uns den Zusammenhangsbegriff aus der Graphentheorie, der im folgenden fundamental sein wird.

Ist $G(\Gamma)$ zusammenhängend, so ist Γ aufspannend. Diese einfache Tatsache werden wir häufig verwenden.

Der Zusammenhang von $G(\Gamma)$ hat eine enge Beziehung zur Dimension von $M(\Gamma)$, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 2.6 *$G(\Gamma)$ habe k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt*

$$\dim M(\Gamma) = |X_1| + |X_2| - k - 1.$$

Beweis: Da $0 \notin M(\Gamma)$, haben wir zu zeigen, daß

$$\dim \operatorname{lin} M(\Gamma) = |X_1| + |X_2| - k. \tag{29}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß Γ aufspannend ist. Da $G(\Gamma)$ nach Voraussetzung k Zusammenhangkomponenten hat, haben wir die Zerlegung $X_\sigma = \dot\bigcup_{1 \le j \le k} X_{\sigma j}$ in nichtleere Teilmengen derart, daß $\Gamma \subset \bigcup (X_{1j} \times X_{2j})$ und $(X_{1j} \dot\cup X_{2j}, (X_{1j} \times X_{2j}) \cap \Gamma)$ zusammenhängend sind.

Da beide Seiten von (29) sich bezüglich einer solchen Zerlegung additiv verhalten, reicht es, (29) im Falle eines zusammenhängenden $G(\Gamma)$ zu zeigen; d.h. wir haben zu beweisen, daß $\operatorname{codim}(\operatorname{lin} M(\Gamma)) = 1$, falls $G(\Gamma)$ zusammenhängend ist. Nun verschwindet die Linearform $(-1, 1)$ auf $\operatorname{lin} M(\Gamma)$. Andererseits haben wir für jede Linearform (f_1, f_2), die auf $M(\Gamma)$ verschwindet, eine Zerlegung

$$\Gamma = \dot\bigcup_{\lambda \in \operatorname{im} f_1} \left(f_1^{-1}(\lambda) \times f_2^{-1}(-\lambda)\right) \cap \Gamma.$$

(Dies ist sofort klar: Ist $(x_1, x_2) \in \Gamma$, so ist $f_2(x_2) = -f_1(x_1)$.) Ist $G(\Gamma)$ zusammenhängend, so kann diese Zerlegung höchstens einen Term haben, also sind f_1 und f_2 konstant und $f_2 = -f_1$, d.h. $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}(1, -1)$. □

Korollar 2.7 *Sei Γ gegeben mit $G(\Gamma)$ zusammenhängend. Dann ist die Anzahl von aufspannenden Facetten von $M(\Gamma)$ die Zahl von Paaren nichtleerer Teilmengen $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, so daß $(A_1 \times A_2) \cap \Gamma = \emptyset$ und $(A_1 \dot\cup A_2^c, (A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma)$ und $(A_1^c \dot\cup A_2, (A_1^c \times A_2) \cap \Gamma)$ zusammenhängend sind. Solche Paare werden wir als* gut *bezeichnen.*

Beweis: Angenommen S ist eine Facette von $M(\Gamma)$. Dann ist nach Lemma 2.6 $\dim S = \dim M(\Gamma) - 1$, folglich hat (wiederum nach Lemma 2.6) $G(\Gamma_S)$ zwei Zusammenhangkomponenten. Also haben wir eine Zerlegung $X_\sigma = A_\sigma \dot\cup A_\sigma^c$ in nichtleere Teilmengen derart, daß $\Gamma_S \subset (A_1 \times A_2^c) \dot\cup (A_1^c \times A_2)$, wo $(A_1 \dot\cup A_2^c, (A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma)$ und $(A_1^c \dot\cup A_2, (A_1^c \times A_2) \cap \Gamma)$ zusammenhängend (und nichtleer) sind. (Man beachte, daß im Vergleich zur obigen Zerlegung $A_1 = X_{11}$, $A_2 = X_{22}$ gewählt wurde.) Nun wird S durch eine Linearform aus $M(\Gamma)$ ausgeschnitten. Weil S eine Facette ist, können wir annehmen, daß diese Linearform ein skalares Vielfaches irgendeiner Linearform ist, die nicht auf ganz $M(\Gamma)$ verschwindet. Eine solche Linearform ist $(I_{A_1}, I_{A_2} - 1)$. Nun ist diese > 0 auf $A_1 \times A_2$ und < 0 auf $A_1^c \times A_2^c$. Also folgt, daß entweder $(A_1 \times A_2) \cap \Gamma = \emptyset$ oder $(A_1^c \times A_2^c) \cap \Gamma = \emptyset$. (Beide Mengen können nicht gleichzeitig leer sein, da $G(\Gamma)$ zusammenhängend ist.) Da aber bei der obigen Zerlegung die Wahl von A_1 gegenüber dessen Kompliment willkürlich war, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $(A_1 \times A_2) \cap \Gamma = \emptyset$. Also ist A_1, A_2 ein gutes Paar.

Die konstruierte Abbildung $\varphi : S \mapsto (A_1, A_2)$ ist injektiv, da $(I_{A_1}, 1 - I_{A_2})$ auf S verschwindet; eine zweite Linearform $(I_{A_1'}, I_{A_2'} - 1)$, die auf S verschwindet, aber nicht auf $M(\Gamma)$, muß, da S Facette ist, von $(I_{A_1}, 1 - I_{A_2})$ linear abhängen, folglich $A_1' = A_1$ und $A_2' = A_2$.

Sei nun umgekehrt A_1, A_2 gegeben, so daß $(A_1 \times A_2) \cap \Gamma = \emptyset$ und $(A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma$ und $(A_1^c \times A_2) \cap \Gamma$ zusammenhängend. Nun verschwindet die Linearform $(1 - I_{A_1}, -I_{A_2})$ auf $\Gamma' = ((A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma) \dot\cup ((A_1^c \times A_2) \cap \Gamma)$ und ist wegen $A_1 \times A_2 = \emptyset$ größer Null auf $\Gamma \setminus \Gamma'$, also schneidet $(1 - I_{A_1}, -I_{A_2})$ die Seite $S := M(\Gamma')$ aus $M(\Gamma)$ aus. Aufgrund der Dimensionsformel ist $\dim M(\Gamma') = \dim M(\Gamma) - 1$ und S eine Facette. Offensichtlich ist nun $\Gamma_S = \Gamma'$ und $\varphi(S) = (A_1, A_2)$. Also ist φ eine Bijektion zwischen den Facetten und guten Paaren, woraus die Behauptung folgt. □

Ein gutes Paar kann nun durch eines der beiden Paarelemente charakterisiert werden:

Korollar 2.8 *Sei A_1, A_2 ein gutes Paar von $\Gamma \subset X_1 \times X_2$. Dann ist*

$$\begin{aligned} A_2^c &= \pi_2 \pi_1^{-1}(A_1), \\ A_1^c &= \pi_1 \pi_2^{-1}(A_2). \end{aligned}$$

Beweis: Aufgrund der Symmetrie reicht es, eine der beiden Aussagen, z.B. die erste zu beweisen.

$(A_1 \dot\cup A_2, (A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma)$ ist zusammenhängend, insbesondere aufspannend, d.h. $A_2^c = \pi_2((A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma)$. Wegen $(A_1 \times A_2) \cap \Gamma = \emptyset$ gilt $(A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma = (A_1 \times X_2) \cap \Gamma = \pi_1^{-1}(A_1)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 2.9 *Sei $\Gamma \subset X \times X$ eine zusammenhängende Partialordnung. Dann ist die Anzahl von Facetten von $M(\Gamma)$ die Anzahl von Ordnungsidealen A von X, derart daß $\emptyset \neq A \neq X$ und die Partialordnung eingeschränkt auf A einerseits und A^c andererseits zusammenhängend ist.*

Beweis: Der technischen Schwierigkeit, die dadurch entsteht, daß in Korollar 2.7 $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ angenommen wurde, entgehen wir, indem wir $\Gamma \subset X \times X'$ annehmen, wo X' eine identische Kopie von X ist. Entsprechend schreiben wir für die Kopie einer Teilmenge $A \subset X$ in X' einfach A'.

Da Γ eine zusammenhängende Partialordnung ist, ist auch $G(\Gamma)$ zusammenhängend. Nun ist aufgrund von Korollar 2.7 die Anzahl von Facetten von $M(\Gamma)$ gleich der Anzahl von Paaren $A_1, A_2 \subset X$, so daß $(A_1 \times A_2') \cap \Gamma = \emptyset$ und $(A_1 \dot\cup A_2'^c, (A_1 \times A_2'^c) \cap \Gamma)$ und $(A_1^c \dot\cup A_2', (A_1^c \times A_2') \cap \Gamma)$ zusammenhängend sind.

Nehmen wir an, A_1, A_2 sei ein solches Paar. $(A_1 \times A_2') \cap \Gamma = \emptyset$ bedeutet, daß für alle $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ gilt $x_1 \not\leq x_2$, insbesondere $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Weiterhin behaupten wir, daß $A_1 \cup A_2 = X$. Denn sei $x \in A_1^c \cap A_2^c$. Weil $(A_1 \dot\cup A_2'^c, (A_1 \dot\cup A_2'^c) \cap \Gamma)$ zusammenhängend ist, existiert ein $x_1 \in A_1$ mit $x_1 \leq x$. Weil $(A_1^c \dot\cup A_2', (A_1^c \times A_2') \cap \Gamma)$ zusammenhängend ist, existiert ein $x_2 \in A_2$ mit $x \leq x_2$. Daraus folgt $x_1 \leq x_2$ und damit $(A_1 \times A_2') \cap \Gamma \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Vorausetzung, also ist $A_1 \cup A_2 = X$. Daraus folgt, daß A_2 ein Ordnungsideal ist, denn für alle $x_2 \in A_2$ und $x \leq x_2$ haben wir $x \in A_1^c = A_2$. Weiterhin ist $A_1 \times A_2'^c = A_1 \times A_1'$, und damit ist $(A_1 \times A_2'^c) \cap \Gamma$ die auf A_1 eingeschränkte Partialordnung, die nach Voraussetzung zusammenhängend ist. Analog ergibt sich, daß die auf $A_1^c = A_2$ eingeschränkte Partialordnung zusammenhängend ist.

Weiterhin ist die Zuordnung $(A_1, A_2) \mapsto A_2$ injektiv wegen $A_1 = A_2^c$. Schließlich ist $\emptyset \neq A_2 \neq X$ wegen $A_1, A_2 \neq \emptyset$.

Ist umgekehrt ein Ordnungsideal $A \subset X$ gegeben, das nicht $\emptyset$ oder X ist und wo sowohl die auf A als auch die auf A^c eingeschränkte Partialordnung zusammenhängend ist, so definieren wir $A_2 = A$ und $A_1 = A^c$. Damit ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $(A_1 \times A_2') \cap \Gamma = \emptyset$. Weiterhin sind, da die Partialordnungen eingeschränkt auf A und A_c zusammenhängend sind, auch $(A_1 \dot\cup A_2^c, (A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma)$ und $(A_1^c \dot\cup A_2, (A_1^c \times A_2) \cap \Gamma)$ zusammenhängend. Damit ist die Zuordnung $(A_1, A_2) \mapsto A_2$ auch surjektiv. □

Korollar 2.10 *Sei $\Gamma \subset X \times X$ eine Partialordnung mit einem Minimum und einem Maximum Dann ist die Anzahl von Facetten von $M(\Gamma)$ die Anzahl von Ordnungsidealen A von X, die verschieden von $\emptyset$ und X sind.*

Beweis: Ist A ein von $\emptyset$ verschiedenes Ordnungsideal, so enthält es sicher das Minimum von X. Damit ist aber die auf A eingeschränkte Partialordnung zusammenhängend. Analog ergibt sich aus $A \neq X$, daß A^c das Maximum enthält und somit die auf A^c eingeschränkte Partialordnung zusammenhängend ist. Somit ist die Forderung nach Zusammenhang in Satz 2.9 automatisch erfüllt. □

2.2.2 Anwendungen und Bemerkungen

In den folgenden Beispielen werden wir nur Fälle von Partialordnungen mit Minimum und Maximum besprechen.

Zu Beginn betrachten wir $X_1 = \{0, \ldots, n-1\}$ mit der natürlichen Ordnung Γ_1. Die von $\emptyset$ und X verschiedenen Ordnungsideale sind die Mengen $\{0\}$,$\{0, 1\}$, $\ldots, \{0, 1, \ldots, n-2\}$, d.h. die Anzahl von aufspannenden Facetten von Γ ist $n-1$.

Als nächstes betrachten wir $X_k = \{0, \ldots, n-1\}^k$ mit der Produktordnung $\Gamma_k = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_1$. Nun ist offensichtlich die Indikatorfunktion eines Ordnungsideals eine bezüglich der Produktordnung monoton fallende Funktion auf X_k mit Werten in 0 und 1. Umgekehrt ist die Faser der 1 einer solchen Funktion ein Ordnungsideal. Damit ist die Anzahl von Ordnungsidealen gleich der Anzahl monoton fallender Funktionen von X_k nach $\{0, 1\}$, die nicht identisch 0 oder 1 sind.

Wir ziehen nun ein Ergebnis aus [3] heran, das für die Anzahl $L_{k,n}$ solcher Funktionen die folgenden Schranken gibt:

$$\frac{2}{3\sqrt{k}} n^{k-1} \leq \log_2 L_{k,n} \leq 2n^{k-1}.$$

Also erhalten wir für die Anzahl von Facetten $|\mathcal{S}_{-1}(M(\Gamma_k))|$ von $M(\Gamma_k)$

$$\frac{2}{3\sqrt{k}} n^{k-1} - 2 \leq \log_2 |\mathcal{S}_{-1}(M(\Gamma_k))| \leq 2n^{k-1}.$$

Für $k = 1$ und $k = 2$ kann man die Anzahl von Facetten explizit berechnen. Für $k = 1$ haben wir dies schon oben durchgeführt, im Falle von $k = 2$ interpretieren wir die monoton fallenden Funktionen $X^2 \to \{0, 1\}$ als monoton fallende Funktionen $X \to \{0, \ldots, n\}$: Wir definieren nämlich

$$f(x) := \begin{cases} \min\{y : (x, y) \in A^c\} & \text{falls} \quad \exists y : (x, y) \in A^c \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Eine solche Interpretation ist natürlich auch für $k > 2$ möglich, aber hier nicht von Interesse.) Offensichtlich ist f monoton fallend und die Zuordnung ist eine Bijektion zwischen den monoton fallenden Funktionen $X^2 \to \{0, 1\}$ und den monoton fallenden Funktionen $X \to \{0, \ldots, n\}$, die wiederum in Bijektion zu den monoton steigenden Funktionen $X \to \{0, \ldots, n\}$ stehen. Durch Addition der identischen Funktion erhalten wir eine Bijektion zwischen den monoton steigenden Funktionen $X \to \{0, \ldots, n\}$ und den streng monoton steigenden Funktionen

$X \to \{0,\dots,2n-1\}$, die nun in Bijektion stehen zu den n–elementigen Teilmengen der Menge $\{0,\dots,2n-1\}$. Deren Anzahl ist aber $\binom{2n}{n}$, also ist die Anzahl der aufspannenden Facetten von Γ_2 durch $\binom{2n}{n}-2$ gegeben.

Nun ist offensichtlich $M(\Gamma_2) = M(\Gamma)\otimes M(\Gamma)$ als Polytop (das Tensorprodukt von Polytopen ist definiert als das von den Dyaden, die durch Paare von Ecken der Polytope gegeben sind, erzeugte Polytop). Wir haben damit ein Beispiel dafür gewonnen, daß die Tensorprodukte zweier Folgen von Polytopen mit einer Facettenanzahl, die linear in der Dimension der Polytope ist, ein Folge von Polytopen ergibt, deren Facettenanzahl $2^{\alpha\sqrt{\dim M(\Gamma_2)}}$ beträgt, also schneller als polynomial in der Dimension wächst. Man könnte das so ausdrücken, daß das Tensorprodukt von Polytopen eine in den Faktoren nicht vorhandene Komplexität erhalten kann.

Geht man nun wieder zu allgemeinen $\Gamma \subset X_1 \times X_2$ über, so kann man sich fragen, ob sich auch eine Folge von Graphen Γ mit der Eigenschaft konstruieren läßt, daß die Anzahl von Facetten von $M(\Gamma)$ exponentiell in der Dimension von $M(\Gamma)$ ist, analog zu unserem Fall des Gittersimplex für $s \geq 3$. Dies ist möglich, wie das folgende Beispiel zeigt.

Wir betrachten nämlich die Partialordnung auf $X = \{0,\dots,n\}$, die erzeugt wird durch $\{(0,i),(i,n) : 1 \leq i \leq n-1\}$. Unter dieser Partialordnung hat X das Minimum 0 und das Maximum n, und die von $\emptyset$ und X verschiedenen Ordnungsideale sind genau die Mengen $\{0\}\cup B$, wo $B \subset \{1,\dots,n-1\}$. D.h. $M(\Gamma)$ hat hier genau $2^{n-1} = 2^{|X|-2}$ aufspannende Facetten. Diese Polytope sind auch ein relativ einfaches Beispiel für Polytope mit wenigen Ecken und vielen Facetten.

Wir können dieses Beispiel in der Ausbeute von Facetten noch verbessern: Sei $X_1 = \{0,\dots,n-1\}$ und $X_2 = \{1',\dots,n'\} \subset X'$, $\Gamma_0 := \Gamma|_{X_1\times X_2}$. Wir behaupten nun, daß $M(\Gamma_0)$ bis auf eine Differenz von 2 dieselbe Anzahl von aufspannenden Facetten hat wie $M(\Gamma)$, genauer $2^{n-1}-2 = 2^{|X_1|-1}-2$. Da wir hier keine Partialordnung mehr haben, müssen wir zur Bestimmung der Anzahl der Facetten von $M(\Gamma_0)$ auf das Korollar 2.7 zurückgehen.

Sei $\emptyset \neq A_1 \subsetneq \{1,\dots,n-1\}$ und $A_2 = \{1,\dots,n-1\}\setminus A_1$. Nun ist $\Gamma_0 \cap (\{1,\dots,n-1\}\times\{1',\dots,(n-1)'\}) = \{(i,i') : 1 \leq i \leq n-1\}$. Also ist $(A_1\times A_2')\cap \Gamma_0 = \emptyset$. Weiter ist $(A_1\dot\cup {A_2'}^c, (A_1\times {A_2'}^c)\cap\Gamma_0)$ zusammenhängend, weil $n' \in {A_2'}^c$, $A_1 \neq \emptyset$ und $(i,n') \in \Gamma_0$ für alle $i \in X_1$. Analog ist auch $(A_1^c\dot\cup A_2', (A_1^c\times A_2')\cap\Gamma_0)$ zusammenhängend. Also hat $M(\Gamma_0)$ mindestens $2^{n-1}-2$ aufspannende Facetten.

Sei nun umgekehrt A_1, A_2 ein gutes Paar von Γ_0. Aufgrund von Korollar 2.8 gilt $A_2^c = \pi_2\pi_1^{-1}(A_1)$. Wäre nun $0 \in A_1$ oder $A_1 = \{1,\dots,n-1\}$, so wäre $A_2^c = X_2$, also $A_2 = \emptyset$. Also ist $0 \notin A_1$. Weiterhin ist $A_1 \neq \emptyset$. Somit gibt es nur die oben aufgezählten guten Paare und damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir haben also ein Beispiel für ein $\Gamma \subset X_1 \times X_2$ konstruiert, wo $M(\Gamma)$ $2^{|X_1|-1}-2 = 2^{|X_2|-1}-2$ Facetten hat. Was ist nun die Maximalanzahl von Facetten, die $M(\Gamma)$ haben kann? Wir erhalten aus Korollar 2.8 für die Maximalanzahl von Facetten $2^{\min(|X_1|,|X_2|)}-2$, denn die guten Paare sind durch die $A_1 \neq \emptyset, X$ bestimmt. Ist die Schranke optimal? Im allgemeinen ja, wie man durch das folgende Beispiel sieht.

Wir wählen $X_1 = \{0, \ldots, n-1\}$, $X_2 = 2^{X_1} \setminus \{\emptyset\}$ und $\Gamma := \{(x, A) : x \in A\}$. Dieses Γ ist zusammenhängend, da $(x, X_1) \in \Gamma$ für alle $x \in X_1$ und $A \neq \emptyset$ für alle $A \in X_2$.

Sei nun $\emptyset \neq A_1 \neq X_1$ eine Teilmenge von X_1. Wir definieren $A_2 := 2^{A_1^c} \setminus \{\emptyset\}$ und behaupten, daß A_1, A_2 ein gutes Paar ist. Zunächst ist offensichtlich $(A_1 \times A_2) \cap \Gamma = \emptyset$. Weiter ist $(A_1 \dot\cup A_2^c, (A_1 \times A_2^c) \cap \Gamma)$ zusammenhängend wegen $X_2 \in A_2^c$ und der Definition von A_2. Schließlich ist $(A_1^c \dot\cup A_2, (A_1^c \times A_2) \cap \Gamma) = (A_1^c \dot\cup 2^{A_1^c}, \{(x, A) : x \in A\})$, entspricht also der Konstruktion von Γ (aber mit A_1 statt X_1) und ist somit zusammenhängend.

Die Anzahl von Facetten ist also gleich $2^{|X_1|} - 2$ und somit ist unsere obige Schranke scharf. Allerdings ist anzunehmen, daß bei der Einschränkung auf Γ, wo $|X_1| = |X_2|$, diese obere Schranke nicht mehr scharf ist.

Literatur

[1] Becker, E., Schwartz, N., Zum Darstellungssatz von Kadison-Dubois, Archiv Math. 40, 421–428 (1983).

[2] Bollobás, B., Combinatorics, Cambridge, 1986.

[3] Bolour, A., Bounds on the number of integer valued monotone functions of k integer arguments, Acta arithmetica 28, 115–127 (1975).

[4] Dall'Aglio, G., Sulle distribuzioni doppie con margini assegnati sogette a delle limitazioni, Giorn. Ist. Ital. Attuari 24, 94–108 (1961).

[5] C. Berge, A. Ghouila–Houri; Programming, Games and Transportation Networks; London 1965.

[6] E. Burger; Einführung in die Theorie der Spiele; Berlin 1959.

[7] Bürgisser, P., Clausen, M., Shokrollahi, M., Algebraic complexity theory, Berlin, Heidelberg (1997).

[8] Feinstein, A., Foundations of Information Theory, New York 1958.

[9] B. Gruenbaum, Convex Polytopes, London–New York–Sydney: Interscience of Publishers (1967).

[10] Kellerer, H. Funktionen auf Produkträumen mit vorgegebenen Marginal–Funktionen, Math. Ann. 144, 323–344 (1961).

[11] A. Schönhage, Partial and total matrix multiplication, SIAM J. Comput. 10, 434–455 (1981).

[12] V. Strassen, The asymptotic spectrum of tensors, J. reine. angew. Math. 384, 102–152 (1988).

[13] V. Strassen, Degeneration and complexity of bilinear maps: Some asymptotic spectra, J. angew. Math. 419, 127–180 (1991).

[14] V. Strassen, Algebra and Complexity, Proceedings of the first European Congress of Mathematics, Paris July 1992, Birkhäuser Verlag, 429–446 (1994).